

А. Киселевъ.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ
А Л Г Е Б Р А.

Уч. Ком. М. Н. Пр. допущена въ качествѣ руководства для гимназій, мужскихъ и женскихъ, и реальныхъ училищъ („Журн. М. Н. Пр.“, 1913 апрѣл). Рекомендована Учебн. Ком. при Св. Синодѣ для употребленія въ духовныхъ семинарияхъ въ качествѣ учебнаго пособия „Церк. Вѣд.“, 1893, № 32); одобрена Деп. Торг. и Мануф., какъ пособие для коммерческихъ училищъ (отъ 30 мая 1898 г.).

Для кадетскихъ корпусовъ рекомендована, какъ руководство.

Изданіе двадцать седьмое.



МОСКВА.

Типографія Т-ва Рябушинскихъ, Ограсн. бул., д. П. П. Рябушинскаго,
1915.

Предисловіе къ 23-му изданію.

Настоящее изданіе является значительно переработаннымъ сравнительно съ предыдущими. Существенному измѣненію подверглось прежде всего изложеніе отрицательныхъ и положительныхъ чиселъ, а также чиселъ несоизмѣримыхъ.

Прежняя, искусственно введенная, условность въ изложеніи чиселъ отрицательныхъ теперь устранена; въ настоящемъ изданіи числа эти рассматриваются конкретно, какъ символы для выраженія величинъ, имѣющихъ «направленіе», т.-е. такихъ величинъ, которыя могутъ быть понимаемы въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Хотя въ такомъ видѣ изложеніе теряетъ ту краткость, которую оно имѣло прежде, но зато оно въ значительной степени выигрываетъ въ ясности и въ легкости усвоенія, да и потеря въ краткости отчасти вознаграждается тѣми сокращеніями въ дальнѣйшемъ курсѣ (при изложеніи первыхъ четырехъ алгебраическихъ дѣйствій и изслѣдованія уравненій), какія возможно было ввести благодаря болѣе подробному изложенію отрицательныхъ чиселъ.

О несоизмѣримыхъ числахъ въ прежнихъ изданіяхъ давалось понятіе, какъ о предѣлѣ нѣкотораго ряда соизмѣримыхъ чиселъ. Такое изложеніе страдало прежде всего логическимъ недостаткомъ, извѣстнымъ подъ названіемъ «заколдованнаго круга» (*circulus vitiosus*), такъ какъ несоизмѣримое число опредѣлялось при помощи предѣла, тогда какъ понятіе о числѣвомъ предѣлѣ уже предполагаетъ предварительное установленіе понятія о несоизмѣримомъ числѣ и о разности между несоизмѣримымъ числомъ и соизмѣримымъ. Въ настоящемъ изданіи понятіе о несоизмѣримыхъ числахъ и о дѣйствіяхъ надъ ними устанавливается независимо отъ понятія о предѣлѣ. Конечно, въ среднихъ классахъ гимназій (и другихъ соотвѣтствующихъ учебныхъ заведеній) нѣтъ возможности дать вполне строгую теорію неизмѣримыхъ чиселъ. Однако можно и должно требовать, чтобы то элементарное понятіе, которое сообщается учащимся въ этихъ классахъ о несоизмѣримыхъ числахъ, не находилось бы въ противорѣчій съ научной теоріей ихъ. Это мы и стремились выполнить въ настоящемъ изданіи алгебры.

Съ цѣлью удовлетворить запросы наиболѣе пытливыхъ учениковъ, особенно тѣхъ изъ нихъ, которые предполагаютъ продолжить свое математическое образованіе въ высшемъ учебномъ заведеніи, мы сочли полезнымъ помѣстить въ концѣ книги, въ видѣ особаго приложения, болѣе строгое и подробное изложеніе теоріи несоизмѣримыхъ чиселъ, именно теоріи, установленной Дедекиндомъ; теорія эта представляется намъ болѣе доступной пониманію учащихся, чѣмъ теоріи Мере-Кантора, Вейерштрасса и др.

Изложеніе какъ чиселъ отрицательныхъ, такъ и несоизмѣримыхъ ведется нами все время при помощи графическаго представленія чиселъ на числовой прямой, и, слѣдовательно, иллюстрируется соотвѣтствующими наглядными чертежами.

Все вообще изложеніе элементарной алгебры было подвергнуто нами тщательному пересмотру съ цѣлью вездѣ, гдѣ возможно, улучшить изложеніе какъ со стороны его простоты, ясности и убѣдительности, такъ и со стороны отдѣлки словесной формы. Укажемъ, напр., на улучшеніе изложенія свойствъ равенствъ и уравненій (§§ 106, 108, 110), изслѣдованія уравненій 1-й степени (§§ 140—148), основныхъ свойствъ извлеченія корней (§§ 162—165), главнѣйшихъ свойствъ неравенствъ (§§ 259—263).

Изъ предисловія къ 25-му изданію.

Задача, иллюстрирующая умноженіе алгебраическихъ чиселъ (о желѣзнодорожномъ поѣздѣ), помѣщавшаяся прежде мелкимъ шрифтомъ въ концѣ главы объ умноженіи (§ 33), теперь отнесена къ самому началу этой главы (§ 29) и помѣщена въ обыкновенномъ шрифтѣ; при такомъ порядкѣ изложенія, прежде установленія правилъ умноженія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, учащимся дается конкретное представленіе о пользѣ этихъ правилъ; отъ этого, конечно, изложеніе становится болѣе понятнымъ.

Теорема о дѣлимости многочлена, цѣлаго относительно x , на разность $x - a$ (§ 76) теперь доказывается иначе, помощью разсмотрѣнія самаго процесса дѣленія. Прежнее доказательство, подкупавшее своей простотой, оказывается не вполне строгимъ (о чемъ теперь сдѣлано замѣчаніе въ выноскѣ).

Упрощено изложеніе основныхъ теоремъ о равносильности уравненій (§§ 108 и 110). Упрощеніе достигнуто тѣмъ, что теперь въ текстѣ самихъ теоремъ говорится только о прибавленіи къ частямъ уравненія одного и того же числа и объ умноженіи частей уравненія на одно и то же число (отличное отъ нуля), тогда какъ прежде добавлялось еще о прибавленіи *алгебраическаго выраженія* и объ умноженіи на *алгебраическое выраженіе*, при чемъ это выраженіе могло содержать въ себѣ неизвѣстныя, или не содержать ихъ. Теперь это добавленіе разсмотрѣно особо, болѣе обстоятельно, въ замѣчанія къ теоремамъ.

§ 146, озаглавленный «Кажущаяся неопредѣленность», передѣланъ теперь заново. Въ прежнемъ изложеніи возможность сокращать члены дроби на общаго множителя, обращающагося въ 0 при частныхъ значеніяхъ буквъ, допускалась безъ всякихъ оговорокъ, какъ сама собою очевидная; въ этомъ заключалась, конечно, ошибка, такъ какъ сокращеніе на 0 невозможно. Теперь вопросъ разобранъ болѣе обстоятельно (на сколько это возможно въ курсѣ элементарной алгебры).

Изложеніе § 224 («Значеніе общихъ формулъ корней квадратнаго уравненія при $a = 0$ ») нѣсколько измѣнено въ зависимости отъ измѣненнаго изложенія «Кажущейся неопредѣленности».

Двѣ основныя теоремы о равносильности неравенствъ, содержащихъ неизвѣстныя (§§ 261 и 262), изложены теперь иначе, въ соответствіи съ измѣненнымъ изложеніемъ подобныхъ теоремъ о равносильности уравненій (§§ 108 и 110).

Упрощено изложеніе «Нѣкоторыхъ свойствъ логарисмовъ» (§ 299), такъ какъ теперь рассматривается только тотъ случай, когда основаніе логарисмовъ больше 1, тогда какъ прежде рассматривался и случай, когда это основаніе меньше 1. Теперь послѣдній случай отнесенъ къ мелкому шрифту.

Предисловіе къ 27-му изданію.

Изъ особенностей этого изданія укажемъ (въ порядкѣ слѣдованія параграфовъ) слѣдующія:

§§ 43 и 44. Измѣнено, согласно замѣчанію Уч. Ком. Мин. Нар. Пр., опредѣленіе одночлена.

§ 97. Обратная теорема («Если произведеніе двухъ чиселъ равно произведенію двухъ другихъ чиселъ, то...») изложена болѣе подробно и вразумительно.

§ 114. Нѣсколько дополнено (обобщено) изложеніе объ уравненіяхъ, содержащихъ въ знаменателяхъ неизвѣстныя.

§ 220. Рѣшеніе примѣра 5-го (найти значеніе дроби, обращающейся въ $\frac{0}{0}$) изложено въ болѣемъ соотвѣтствіи съ § 146 («Кажущаяся неопредѣленность»).

§ 224 («Значеніе общихъ формулъ корней квадратнаго уравненія при $a = 0$ ») изложенъ болѣе обстоятельно, при чемъ этотъ параграфъ разбитъ на два: 224 и 224, а.

Въ § 235 («Общій способъ освобожденія уравненія отъ знаковъ радикала») взять другой примѣръ, болѣе удобный, чѣмъ прежде, и кромѣ того (согласно замѣчанію прив. доц. С. О. Шатуновскаго, помѣщенному въ № 607 «Вѣстника опытной физики и элементарной математики») сдѣлано одно важное дополненіе и приведенъ новый примѣръ.

Въ § 236 («Приведеніе знаменателя дроби къ рациональному виду») взять иной примѣръ въ соотвѣтствіи съ примѣромъ § 235.

§ 238. («Преобразование сложнаго радикала»). Излагавшаяся прежде лемма о равенствѣ: $a + \sqrt{b} = a_1 + \sqrt{b_1}$ теперь выпущена, вслѣдствіе чего изложеніе нѣсколько упрощено и сокращено.

Въ § 310 («По данному числу найти логарифмъ») нѣсколько измѣнено объясненіе нахождения $\text{Log } 74,2354$ и добавлено (мелкимъ шрифтомъ) обобщеніе пріема нахождения на общій случай $\text{Log}(n+h)$.

Добавлены (мелкимъ шрифтомъ): § 311, а («Предѣлъ погрѣшности приближеннаго логарифма») и 311, б («Случай, когда данное число неточное»).

Въ § 312 нѣсколько измѣнено объясненіе нахождения числа по данному логарифму 2,59449 и добавлено (мелкимъ шрифтомъ) обобщеніе пріема на какой угодно 5-тизначный логарифмъ.

Добавленъ (мелкимъ шрифтомъ) § 313, *а*. («Предѣлъ погрѣшности числа, найденнаго по данному логариѳому»).

Въ § 316 примѣръ 1-й (на вычисленіе помощью логариѳомовъ) взятъ иной, болѣе удобный, при чемъ добавленъ § 316, *а* (мелкимъ шрифтомъ), въ которомъ находится предѣлъ погрѣшности числа, найденнаго въ примѣрѣ 1-мъ. Примѣры 2-й и 3-й оставлены прежніе, но сдѣланы къ нимъ добавленія (мелк. шр.) о предѣлѣ погрѣшности.

Къ § 347 добавлена выноска, въ которой объяснено, почему число π , заключающееся между двумя данными конечными десятичными дробями, будучи развернуто въ непрерывную дробь, должно сохранить всѣ частныя, общія этимъ десятичнымъ дробямъ, также развернутымъ въ непрерывныя дроби.

Прежнее «Приложеніе 2» (въ концѣ книги, о предѣлѣ погрѣшности, совершаемой при вычисленіи помощью пятизначныхъ логариѳомовъ) теперь выпущено, такъ какъ содержаніе этого приложенія (въ нѣсколько упрощенномъ видѣ) отнесено теперь частью къ § 311, *а*, частью къ § 313, *а*. Взамѣнъ того теперь помѣщено новое «Приложеніе 2», въ которомъ излагается нахожденіе верхняго предѣла погрѣшности, совершаемой вслѣдствіе допущенія пропорциональности разностей между логариѳмами разностямъ соответствующихъ чиселъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Передъ главами, напечатанными мелкимъ шрифтомъ,
поставлена звѣздочка.

Стран

Предисловія	III
Оглавленіе	IX

Отдѣлъ I. Предварительныя понятія.

I. Алгебраическое замечаніе	1
II. Главнѣйшія свойства первыхъ четырехъ ариметическихъ дѣйствій	8
III. Положительныя и отрицательныя числа	12
IV. Раздѣленіе алгебраическихъ выраженій	50
V. Приведеніе подобныхъ членовъ	55

Отдѣлъ II. Первые четыре алгебраическія дѣйствія

I. Алгебраическое сложеніе и вычитаніе	57
II. Алгебраическое умноженіе	61
III. Умноженіе расположенныхъ многочленовъ	65
IV. Нѣкоторыя формулы умноженія двучленовъ	68
V. Алгебраическое дѣленіе	70
VI. *Дѣлимость многочлена, цѣлаго относительно x , на $x-a$	82
VII. Разложеніе многочленовъ на множители	85
VIII. Алгебраическія дроби	88
IX. Отрицательные показатели	99
X. Отношеніе и пропорція	101

Отдѣлъ III. Уравненія первой степени.

I. Общія начала рѣшенія уравненій	109
II. *Уравненія, содержащія въ знаменателяхъ неизвѣстныя	120
III. Уравненіе первой степени съ 1 неизвѣстнымъ	122
IV. Система двухъ уравненій первой степени съ 2 неизвѣстными	128
V. Система трехъ уравненій первой степени съ 3 неизвѣстными	135
VI. Система уравненій первой степени со многими неизвѣстными	138
VII. Нѣкоторые частные случаи системъ уравненій	139
VIII. *Понятіе о способѣ неопредѣленныхъ множителей	142
IX. Уравненія неопредѣленныя и несовмѣстныя	144
X. Исслѣдованіе уравненій первой степени	147

Отдѣлъ IV. Степени и корни.

I. Основные свойства возвышенія въ степень	166
II. Возвышеніе въ квадратъ многочленовъ	170
III. Основные свойства извлеченія корня	171
IV. Извлеченіе арифметическаго квадратнаго корня.	
1. Извлеченіе квадратнаго корня изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ данномъ числѣ	181
2. Извлеченіе приближенныхъ квадратныхъ корней	189
3. Извлеченіе квадратныхъ корней изъ дробей	193
4. Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочлена	194
V. *Извлеченіе арифметическаго кубическаго корня	
1. Извлеченіе кубическаго корня изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ данномъ числѣ	199
2. Извлеченіе приближенныхъ кубическихъ корней	203
3. Извлеченіе кубическихъ корней изъ дробей	205
VI. Понятіе о несоизмѣримомъ числѣ	206
VII. Несозизмѣримыя значенія радикаловъ	216
VIII. Дѣйствія надъ радикалами	221

Отдѣлъ V. Уравненія степени выше первой.

I. Квадратное уравненіе	232
II. *Нѣкоторыя частные случаи квадратныхъ уравненій	246
III. Исслѣдованіе квадратнаго уравненія	249
IV. *Комплексныя числа	253
V. Освобожденіе уравненія отъ радикаловъ	265
VI. Уравненія высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ или къ уравненіямъ первой степени	273
VII. *Нѣкоторыя замѣчанія объ алгебраическихъ уравненіяхъ,	283
VIII. Система уравненій второй степени	286

Отдѣлъ VI. Неравенства и неопредѣленные уравненія.

I. Неравенства	294
II. Неопредѣленное уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными	308

Отдѣлъ VII. Обобщеніе понятія о показателяхъ.

Дробные и несоизмѣримыя показатели	322
--	-----

Отдѣлъ VIII. Прогрессіи и логарифмы.

I. Арифметическая прогрессія	328
II. Геометрическая прогрессія	333

	<i>Стран.</i>
III. Общія свойства логарифмовъ	341
IV. Свойства десятичныхъ логарифмовъ	352
V. Устройство и употребленіе таблицъ	357
VI. Показательныя и логарифмическія уравненія	381
VII. Сложные проценты, срочныя уплаты и срочные взносы	383
Отдѣлъ IX. Соединенія, биномъ Ньютона и непрерывныя дроби.	
I. Соединенія	392
II Биномъ Ньютона	399
III. Непрерывныя дроби	407
IV. Нѣкоторыя приложенія непрерывныхъ дробей	421
*Приложеніе 1-е.	
Несовмѣримыя числа	427
*Приложеніе 2-е.	
Пределъ погрѣшности, происходящей отъ допущенія пропорціональности разностей между логарифмами разностей между соответствующими числами	447

ОТДѢЛЪ I.

Предварительныя понятія.

ГЛАВА I.

Алгебраическое знакоположеніе.

1. Употребленіе буквъ. 1°. Для обобщенія задачи а ч зь. Если желаютъ указать, какъ рѣшаются задачи, сходныя между собою по условіямъ, но различающіяся только величиною данныхъ чиселъ, то обыкновенно поступаютъ такъ: обозначаютъ данныя числа буквами (латинскаго или французскаго алфавита ¹⁾) и, рассуждая совершенно такъ, какъ если бы данныя были выражены числами, указываютъ посредствомъ знаковъ, какія дѣйствія надо произвести надъ данными числами и въ какой послѣдовательности, чтобы получить искомое число. При этомъ, обозначивъ одно число какою-нибудь буквою, другія числа обозначаютъ иными буквами, чтобы не смѣшать одного числа съ другимъ.

Пусть, напр., мы желаемъ узнать, какъ рѣшаются задачи, сходныя съ такой: 15 рабочихъ окончили нѣкоторую работу въ 20 дней. Во сколько дней окончили бы ту же работу 10 человекъ? Для этого предлагаемъ задачу въ общемъ видѣ:

a рабочихъ окончили нѣкоторую работу въ t дней. Во сколько дней окончатъ ту же работу b рабочихъ?

Рѣшимъ эту задачу приведеніемъ къ единицѣ. Если a рабочихъ окапчиваютъ работу въ t дней, то 1 рабочему на выполнение

¹⁾ Употребительны также и буквы греческаго алфавита, чаще всего слѣдующія: α (альфа), β (бѣта), γ (гамма), δ (дельта), ϵ (эпсилонъ), θ (тѣта), π (пи), ρ (ро), φ (фи), ω (омега).

той же работы понадобится $t \times a$ дней, а b рабочимъ $\frac{t \times a}{b}$ дней. Обозначивъ искомое число дней буквою x , можемъ написать:

$$x = \frac{t \times a}{b}.$$

Равенство это наз. алгебраическою формулою; оно выражаетъ, что искомое число x получится, если число дней умножить на число рабочихъ, данное въ условіи задачи, и раздѣлить на число рабочихъ, данное въ ея вопросѣ.

2°. Для выраженія свойствъ чиселъ. Если желаемъ кратко выразить, что нѣкоторое свойство принадлежитъ не какимъ-нибудь отдѣльнымъ числамъ, а всѣмъ числамъ, или группѣ чиселъ, то обыкновенно числа эти обозначаютъ буквами. Такъ, свойство, что произведеніе двухъ чиселъ не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей, можно выразить равенствомъ:

$$a \times b = b \times a.$$

Это равенство есть алгебраическая формула, выражающая, что произведеніе какого-нибудь числа a на другое какое-нибудь число b равно произведенію этого другого числа b на первое число a .

2. Алгебраическое выраженіе. Формула. Совокупность чиселъ, изъ которыхъ всѣ или только нѣкоторыя выражены буквами и которыя соединены посредствомъ знаковъ, указывающихъ, какія дѣйствія и въ какой последовательности надо произвести надъ этими числами, называется алгебраическимъ выраженіемъ (или просто выраженіемъ).

Таковы, напр., выраженія:

$$\frac{t \times a}{b}; \quad a \times b; \quad 2 \cdot a + b.$$

В числѣ алгебраическое выраженіе для данныхъ численныхъ значеній буквъ значитъ подставить въ него на мѣсто буквъ эти значенія и произвести указанныя дѣйствія; число, получившееся послѣ этого, наз. численною величиною алгебраическаго выраженія (для данныхъ значеній буквъ).

Такъ, численная величина перваго изъ указанныхъ выше выраженій при $t=20$, $a=15$ и $b=10$ есть 30.

Два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знакомъ равенства или неравенства, образуютъ алгебраическую формулу; напр.:

$$a \times b = b \times a; \quad a + 1 > a.$$

3. Тожественныя выраженія. Два алгебраическія выраженія, наз. тождественными, если при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ эти выраженія, они имѣютъ одну и ту же численную величину. Таковы, напр., выраженія:

$$\frac{t \times a}{b} \text{ и } t \times \frac{a}{b}; \quad a \times b \text{ и } b \times a.$$

4. Предметъ алгебры. Алгебра указываетъ различные способы, посредствомъ которыхъ одно алгебраическое выраженіе можетъ быть преобразовано въ другое, тождественное ему. Цѣль такого преобразованія можетъ быть различна:

или 1) упрощеніе алгебраическаго выраженія, т.е. замѣна одного выраженія другимъ, содержащимъ меньшее число дѣйствій, или болѣе простыхъ дѣйствій;

или 2) приведеніе алгебраическаго выраженія къ виду, удобному для обнаруженія какихъ-либо свойствъ его;

или 3) приведеніе алгебраическаго выраженія къ виду, удобному для запоминанія.

О другихъ сторонахъ алгебры будетъ сказано впоследствии (§ 105).

5. Дѣйствія, разсматриваемыя въ алгебрѣ, слѣдующія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень и извлеченіе корня. Опредѣленія первыхъ пяти дѣйствій извѣстны изъ ариметики, а именно:

С л о ж е н і е есть дѣйствіе, посредствомъ котораго нѣсколько данныхъ чиселъ соединяются въ одно число, называемое ихъ суммой.

В ы ч и т а н і е есть дѣйствіе (обратное сложенію), посредствомъ котораго по данной суммѣ (уменьшаемому) и одному

слагаемому (вычитаемому) отыскивается другое слагаемое (остатокъ или разность).

Умноженіе на цѣлое число есть дѣйствіе, посредствомъ котораго одно данное число (множимое) повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ въ другомъ данномъ числѣ (во множителѣ); умноженіе на дробь есть дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается такая дробь множимаго, какую множитель составляетъ отъ единицы.

Дѣленіе есть дѣйствіе (обратное умноженію), посредствомъ котораго по данному произведенію (дѣлимому) и одному сомножителю (дѣлителю) отыскивается другой сомножитель (частное).

Возвышеніе въ степень есть дѣйствіе, посредствомъ котораго находится произведеніе нѣсколькихъ одинаковыхъ сомножителей; такое произведеніе называется степенью, а число одинаковыхъ сомножителей—показателемъ степени. Такъ, возвысить 2 въ четвертую степень значитъ найти произведеніе $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ (оно равно 16); 16 есть четвертая степень двухъ, 4—показатель этой степени. Вторая степень называется иначе квадратомъ, третья—кубомъ.

Первою степенью числа называютъ само это число.

Шестое дѣйствіе—извлеченіе корня—опредѣляется такъ:

Извлеченіе корня есть дѣйствіе (обратное возвышенію въ степень), посредствомъ котораго по данной степени и показателю этой степени находится возвышаемое число. Напримѣръ, извлечь изъ 8 корень третьей степени значитъ найти число, котораго 3-я степень равняется 8; такое число есть 2, потому что $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; корень второй степени изъ 100 есть 10, потому что $10 \cdot 10 = 100$. Корень второй степени называется иначе квадратнымъ, а корень третьей степени—кубическимъ.

6. Знаки, употребляемые въ алгебрѣ. 1°. Для обозначенія дѣйствій. Въ алгебрѣ для обозначенія первыхъ четырехъ дѣйствій употребляются тѣ же знаки, какъ

и въ арифметикѣ; только знакъ умноженія обыкновенно не пишется, если оба сомножителя или одинъ изъ нихъ выражены буквами; напр., вмѣсто того, чтобы писать $a \times b$ или $a . b$, обыкновенно пишутъ ab и вмѣсто $3 . a$ просто $3a$.

Возвышеніе въ степень обозначается помѣщеніемъ показателя степени надъ возвышаемымъ числомъ, съ правой стороны; напр., 2^4 обозначаетъ, что 2 возвышается въ 4-ю степень.

При всякомъ числѣ можно подразумѣвать показателя 1; напр., a все равно, что a^1 , потому что первая степень какого-нибудь числа, по опредѣленію, есть само это число.

Извлеченіе корня обозначается знакомъ $\sqrt{\quad}$; подъ его горизонтальной чертой пишутъ то число, изъ котораго надо извлечь корень, а надъ отверстиемъ угла ставятъ показателя корня; напр., $\sqrt[3]{8}$ означаетъ корень 3-й степени изъ 8.

Квадратный корень принято писать безъ показателя, г.-е. такъ: $\sqrt{25}$, $\sqrt{100}$ и т. д.

2°. Для указанія равенства или неравенства чиселъ. Какъ знаки соотношеній между численными величинами употребляются: знакъ равенства $=$ и знакъ неравенства $>$, обращаемый отверстиемъ угла къ большому числу. Напр., выраженія:

$$5+2=7, \quad 5+2>6; \quad 5+2<10$$

читаются такъ: $5+2$ равно 7, $5+2$ больше 6; $5+2$ меньше 10.

Иногда помѣщаютъ два знака другъ подъ другомъ; напр., выраженія:

$$1) a \geq b, \quad 2) a \leq b; \quad 3) a \pm b$$

означаютъ: 1) a больше или равно b ; 2) a больше или меньше b ; 3) a плюс или минусъ b .

Употребительны еще знаки \neq , \nlessgtr , \nlessgtr , получаемые перечеркиваніемъ знаковъ равенства или неравенства. Такое перечеркиваніе означаетъ отрицаніе того значенія, которое придается знаку перечеркнутому. Такъ, знакъ \neq означаетъ «не равно», знакъ \nlessgtr означаетъ «не больше» и т. п.

3°. Для указанія порядка дѣйствій. Если желаютъ выразить, что, совершивъ какое-либо дѣйствіе, надо надъ полученнымъ результатомъ произвести снова какое-либо дѣйствіе, то обозначеніе перваго дѣйствія заключаютъ въ скобки. Напр., выраженіе:

$$20 - (10 + 2)$$

означаетъ, что изъ 20 вычитается не 10, а сумма отъ сложенія 10 съ 2; слѣд., при вычисленіи этого выраженія надо сначала сложить 10 и 2 (получимъ 12) и затѣмъ полученную сумму вычесть изъ 20 (получимъ 8).

Когда приходится заключить въ скобки такое выраженіе, въ которомъ есть свои скобки, то новымъ скобкамъ придаютъ какую-нибудь другую форму для отличія ихъ отъ прежнихъ. Напримѣръ, выраженіе:

$$a\{b - [c + (d - e)]\}$$

означаетъ, что изъ d вычитается e , полученная разность прикладывается къ c , полученная сумма вычитается изъ b и на эту разность умножается a .

Скобки такой формы: () обыкновенно назыв. малыми, такой: [] — прямыми и такой: { } — фигурными.

7. Нѣкоторыя замѣчанія относительно употребленія скобокъ. 1°. Такъ какъ употребленіе скобокъ имѣетъ цѣлью указать, въ какомъ порядкѣ надо производить дѣйствія надъ числами, то скобки отбрасываются во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда и безъ нихъ не можетъ быть въ этомъ отношеніи недоразумѣнія. Напр., скобки не ставятся при обозначеніи послѣдовательныхъ сложеній, вычитаній, умноженій; такъ:

$$\begin{array}{lll} \text{вмѣсто } [(a+b)+c]+d & \text{пишутъ } a+b+c+d \\ > [(a-b)+c]-d & > a-b+c-d \\ > [(ab)c]d & > abcd. \end{array}$$

Въ этихъ случаяхъ порядокъ дѣйствій указывается самимъ выраженіемъ (слѣва направо).

2°. Горизонтальная черта, употребляемая для обозначенія

дѣленія или для извлеченія корня, замѣняютъ собою скобки; такъ выраженія:

$$\frac{a+b}{c} \text{ и } \sqrt{a^2+b^2}$$

означаютъ то же самое, что и выраженія:

$$\frac{(a+b)}{c} \text{ и } \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

(если только черта берется достаточной длины).

3°. Кромѣ того, чтобы уменьшить число случаевъ, когда надо писать скобки, условимся держаться слѣдующаго правила.

Правило. Алгебраическое выраженіе пишутъ безъ скобокъ, если при его вычисленіи дѣйствія должны слѣдовать въ такомъ порядкѣ: сначала возвышеніе въ степень и извлеченіе корня (конечно, если эти дѣйствія указаны), затѣмъ умноженіе и дѣленіе, и, наконецъ, сложеніе и вычитаніе.

Если же пужно указать иную послѣдовательность дѣйствій, или если примѣненіе указаннаго правила возбуждаетъ какіи-либо сомнѣнія, то пользуются скобками.

Напр., въ такомъ выраженіи, написанномъ безъ скобокъ:

$$ab^2+c$$

указаны 3 дѣйствія: умноженіе, возвышеніе въ степень и сложеніе. Согласно правилу эти дѣйствія должны быть произведены въ такой послѣдовательности: сначала возвышеніе въ степень, потомъ умноженіе и послѣ сложеніе. Итакъ, надо сначала возвысить въ квадратъ; но что возвысить: только ли число b , или произведеніе ab ? Конечно, только число b , такъ какъ если бы требовалось возвысить въ квадратъ произведеніе ab , то сначала надо было бы сдѣлать умноженіе (a на b), а затѣмъ возвышеніе въ квадратъ, т.-е. надо было бы совершить дѣйствія въ порядкѣ иномъ, чѣмъ указано въ правилѣ, и тогда нужно было бы поставить скобки, именно такъ: $(ab)^2$. Послѣ возвышенія b въ квадратъ надо перейти къ умноженію. Но что умножать: a на b^2 , или a на сумму b^2+c . Конечно, a на b^2 , такъ какъ если бы требовалось умножить a на сумму b^2+c , то сначала надо было бы сдѣлать

сложение чиселъ b^2 и c , а затѣмъ уже умноженіе, т.-е. тогда дѣйствія должны были совершаться въ порядкѣ иномъ, чѣмъ указано въ правилѣ, и, слѣд., пужно было бы поставить скобки, а именно, написать такъ: $a(b^2+c)$.

Если дапо выраженіе $a : bc$, въ которомъ только два дѣйствія: дѣленіе и умноженіе, то остается невыясненнымъ, какое изъ этихъ дѣйствій должно быть выполнено сначала (такъ какъ въ указанномъ выше правилѣ объ этомъ ничего не говорится); для избѣжанія недоразумѣній въ подобныхъ случаяхъ лучше ставить скобки; если мы напишемъ такъ $a : (bc)$, то сначала надо b умножить на c , а затѣмъ раздѣлить a на произведеніе bc ; если же скобки поставимъ такимъ образомъ: $(a : b)c$, то прежде придется раздѣлить a на b , а затѣмъ это частное умножить на c .

Впрочемъ, выраженіе $a : bc$, написанное безъ скобокъ, принято понимать въ смыслѣ $a : (bc)$, т.-е. что надо сдѣлать сначала умноженіе, а потомъ дѣлеше.

ГЛАВА II.

Главнѣйшія свойства первыхъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій.

8. Свойства прямыхъ дѣйствій: сложения и умноженія. Изъ свойствъ этихъ дѣйствій укажемъ слѣдующія:

1°. Сумма не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.

Напр., сумма $7+3+2$ равна 12; если измѣнимъ какъ бы то ни было порядокъ слагаемыхъ, напр., такъ: $3+2+7$, то получимъ все ту же сумму 12.

Свойство это въ примѣненіи къ тремъ слагаемымъ можно выразить такою буквенною формулою (обозначая буквами a , b и c какія-нибудь три числа):

$$a+b+c=a+c+b-b+a+c=b+c+a=...$$

Это свойство носитъ названіе **перемѣстительнаго**, такъ какъ оно состоитъ въ неизмѣняемости суммы отъ перемѣщенія слагаемыхъ.

2°. Сумма не измѣнится, если какія-либо слагаемыя мы замѣнимъ ихъ суммою.

Напр., сумма $12+3+7$. равная 22, не измѣнится, если въ ней какія-нибудь слагаемыя, напр., второе и третье, замѣнимъ ихъ суммой: $12+(3+7)=12+10=22$.

Свойство это называется **сочетательнымъ**, такъ какъ оно состоитъ въ томъ, что нѣсколько слагаемыхъ, не измѣняя суммы, мы можемъ сочетать (соединять въ одно число).

Замѣтимъ, что заключеніе въ скобки нѣсколькихъ слагаемыхъ, начиная съ перваго, нисколько не измѣняетъ смысла выраженія; такъ, $(12+3)+7$ означаетъ совершенно то же, что и $12+3+7$, а именно, что къ 12 прибавляется 3 и затѣмъ къ полученной суммѣ прикладывается 7.

Въ примѣненіи къ тремъ слагаемымъ сочетательное свойство можно выразить такой формулой:

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Читая это равенство справа нѣлѣво, т.-е. такъ: $a+(b+c)=a+b+c$, мы можемъ высказать то же сочетательное свойство въ другой словесной формѣ:

чтобы къ какому-нибудь числу прибавить сумму, достаточно прибавить къ этому числу каждое слагаемое суммы одно за другимъ.

Изъ сочетательнаго свойства слѣдуетъ: чтобы вычислить сумму нѣсколькихъ слагаемыхъ, можно разбить эти слагаемыя на какія угодно группы, произвести сложеніе въ каждой группѣ отдѣльно и затѣмъ полученные суммы соединить въ одну.

3°. Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей.

Такъ: $2 \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \dots$

Вообще: $abc = acb = cab = \dots$

Это перемѣстительное свойство умноженія доказано въ ариметикѣ сначала для цѣлыхъ чиселъ, а затѣмъ и для дробей.

4°. Произведеніе не измѣнится, если какихъ-либо сомножителей мы замѣнимъ ихъ произведеніемъ.

Напр., произведение 7 . 2 . 5, равное 70, останется без изменения, если сомножителей 2 и 5 заменим их произведением: $7 \cdot (2 \cdot 5) = 7 \cdot 10 = 70$.

Заметим и тутъ, что выражения $(7 \cdot 2) \cdot 5$ и $7 \cdot 2 \cdot 5$ означают одно и то же, а именно, что 7 умножается на 2 и затѣмъ полученное произведение умножается на 5.

Въ примѣненіи къ произведенію трехъ сомножителей **сочетательное** свойство умноженія можно выразить такимъ равенствомъ:

$$abc = a(bc).$$

Читая это равенство справа налѣво, мы можемъ то же сочетательное свойство выразить иначе:

чтобы умножить какое-нибудь число (a) на произведение (bc), достаточно умножить это число на перваго сомножителя (получимъ ab), результатъ умножить на втораго сомножителя (получимъ abc) и т. д.

Изъ сочетательнаго свойства умноженія слѣдуетъ: чтобы вычислить произведение нѣсколькихъ сомножителей, можно разбить этихъ сомножителей на какія угодно группы, произвести умноженіе въ каждой группѣ отдѣльно и полученныя произведенія перемножить.

5°. Чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число каждое слагаемое отдѣльно и полученныя произведенія сложить.

Такъ, чтобы умножить сумму $300 + 20 + 5$ (т.-е. число 325) на 8, достаточно умножить на 8 отдѣльно 300, 20 и 5 и полученныя числа сложить.

Это свойство произведенія называется **распределительнымъ**, такъ какъ оно состоитъ въ томъ, что дѣйствіе умноженія, производимое надъ суммой, распределяется на каждое слагаемое.

Въ примѣненіи къ суммѣ 2-хъ слагаемыхъ это свойство можно выразить такой формулой:

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Такъ какъ произведеніе не мѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей, то формулу эту можно писать и такъ:

$$c(a+b)=ca+cb.$$

Поэтому распределительное свойство иногда высказываютъ такъ:

чтобы умножить какое-нибудь число на сумму, достаточно умножить это число на каждое слагаемое отдѣльно и полученныя произведенія сложить.

9. Свойства обратныхъ дѣйствій: вычитанія и дѣленія. Изъ свойствъ, принадлежащихъ обратнымъ дѣйствіямъ, т.-е. вычитанію и дѣленію, укажемъ слѣдующія:

1°. Чтобы отнять отъ какого-нибудь числа сумму, достаточно отнять отъ этого числа каждое слагаемое одно за другимъ.

Такъ: $20-(3+8+2)=20-3-8-2.$

Вообще: $a+(b+c+d)=a-b-c-d.$

Это свойство можно считать очевиднымъ.

2°. Чтобы прибавить къ какому-нибудь числу разность, достаточно прибавить къ этому числу уменьшаемое и вычесть, вычитаемое.

Такъ: $8+(5-3)=8+5-3.$

Вообще: $a+(b-c)=a+b-c.$

Дѣйствительно, если второе слагаемое увеличимъ на c , т.-е. вмѣсто $b-c$ возьмемъ b , то получимъ сумму $a+b$; но отъ увеличенія слагаемаго на c сумма увеличивается также на c ; слѣд., искомая сумма должна быть меньше $a+b$ на c , т.-е. она будетъ $a+b-c$

3°. Чтобы отнять отъ какого-нибудь числа разность, достаточно прибавить къ этому числу вычитаемое и затѣмъ отнять уменьшаемое.

Такъ: $4-(5-2)=4+2-5.$

Вообще: $a-(b-c)=a+c-b.$

Дѣйствительно, если мы увеличимъ уменьшаемое и вычитаемое на c , то разность не измѣнится; но тогда уменьшаемое будетъ $a+c$, а вычитаемое b ; слѣд., разность будетъ $a+c-b$.

4°. Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на произведение, достаточно раздѣлить это число на перваго сомножителя, полученный результатъ на втораго, потомъ на третьяго и т. д.

Такъ: $400 : (4 \cdot 2 \cdot 5) = [(400 : 4) : 2] : 5 = (100 : 2) : 5 = 50 : 5 = 10$.

5°. Чтобы раздѣлить произведение на какое-нибудь число, достаточно раздѣлить на это число какого-либо одного сомножителя.

Такъ, чтобы раздѣлить произведение $10 \cdot 8$ на 2, достаточно раздѣлить на 2 или 10, или 8; въ первомъ случаѣ получимъ $5 \cdot 8 = 40$ и во второмъ случаѣ $10 \cdot 4 = 40$.

10. Примѣненія этихъ свойствъ. Указанныя свойства позволяютъ дѣлать нѣкоторые простѣйшія преобразованія алгебраическихъ выраженій; приведемъ этому примѣры.

Примѣры.

$$1) a + b + a + 2 + b + a + 8 = (a + a + a) + (b + b) + (2 + 8) = \\ = a \cdot 3 + b \cdot 2 + 10 = 3a + 2b + 10.$$

$$2) a + (b + a) = a + b + a = (a + a) + b = 2a + b.$$

$$3) a \cdot (3xxa) \cdot (4ay) = a \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot a \cdot 4 \cdot a \cdot y = (3 \cdot 4)(aaa)(xx)y \\ = 12a^3x^2y.$$

$$4) a^3a^2 = (aaa)(aa) = aaaaaa = a^5.$$

$$5) (a + x + 1) \cdot 3 = a \cdot 3 + x \cdot 3 + 3 = 3a + 3x + 3.$$

$$6) x(ax^2 + x) = x(ax^2) + xx = xaxx + xx = a(xx) + xx = ax^2 + x^2.$$

$$7) m + (a - m) = m + a - m = a + m - m = a.$$

$$8) p - (q - p) = p + p - q = 2p - q.$$

$$9) \frac{3ab}{3} = \frac{3}{3}ab = 3ab.$$

Г Л А В А III.

Положительныя и отрицательныя числа.

(Алгебраическія или относителныя числа).

11. Предварительное замѣчаніе. Въ началѣ курса арифметики мы рассматривали число только, какъ с о б р а н і е е д и н и ц ѣ; въ этомъ смыслѣ число представляется всегда ц ѣ л ы м ѣ. Мы видѣли тогда, что для этихъ чиселъ два обрат-

ныя дѣйствія—вычитаніе и дѣленіе—не всегда возможны, а именно: первое невозможно, когда вычитаемое больше уменьшаемаго (напр., нельзя вычесть 7 изъ 5), а второе невозможно когда дѣлимое не кратно дѣлителя (напр., невозможно раздѣлить 12 на 5, или 3 на 7). Перейдя затѣмъ въ ариметикѣ къ другому понятію о числѣ, какъ о результатѣ измѣренія величинъ, мы должны были расширить область чиселъ, введя понятіе о дробномъ числѣ. Это расширеніе дало намъ возможность выражать числами и такія значенія величинъ, въ которыхъ единица измѣренія не повторяется цѣлое число разъ, или которыя меньше этой единицы. При этомъ, между прочимъ, оказалось, что съ введеніемъ въ ариметику дробныхъ чиселъ дѣйствіе дѣленія сдѣлалось возможнымъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣлимое не кратно дѣлителю (напр., частное $12 : 5$ равно $2\frac{4}{5}$, частное $3 : 7$ равно $\frac{3}{7}$ и т. д.). Однако, вычитаніе и для дробныхъ чиселъ осталось невозможнымъ въ томъ случаѣ, когда вычитаемое больше уменьшаемаго.

Теперь, переходя отъ ариметики къ алгебрѣ, мы прежде всего займемся дальнѣйшимъ расширеніемъ понятія о числѣ съ цѣлью имѣть возможность выражать посредствомъ чиселъ значенія величинъ особаго рода, о которыхъ мы будемъ говорить сейчасъ. Мы увидимъ при этомъ, что съ этимъ новымъ расширеніемъ понятія о числѣ дѣйствіе вычитанія сдѣлается возможнымъ во всѣхъ случаяхъ.

12. Понятіе о величинахъ, имѣющихъ направленіе. Приведемъ нѣсколько простыхъ задачъ, изъ которыхъ будетъ ясно видно, о какихъ величинахъ мы теперь будемъ говорить.

Задача 1. Извѣстно, что когда курьерскій поѣздъ Николаевской желѣзной дороги (соединяющей Москву съ Петербургомъ) находился на разстояніи 100 верстъ отъ станціи Вологое (эта станція лежитъ приблизительно посредицѣ между Москвой и Петербургомъ), тогда пассажирскій поѣздъ этой дороги былъ на разстояніи 50 верстъ

отъ Вологова. На какомъ разстояніи находились тогда эти два поѣзда другъ отъ друга?

Легко замѣтить, что въ такомъ видѣ задача эта представляется не вполне определенной: въ ней не сказано, находились ли поѣзда по одну сторону отъ Вологова, напр., въ сторону по направленію къ Петербургу, или же они были по разнымъ сторонамъ отъ Вологова. Если первое, то разстояніе между поѣздами было, очевидно, $100 - 50$, т.-е. 50 верстъ, а если второе, то разстояніе было $100 + 50$, т.-е. 150 верстъ. Значить, для того, чтобы эта задача была определенной, не достаточно задать величину разстоянія отъ Вологова, но еще нужно указать, въ какомъ направлении эти разстоянія надо считать отъ Вологова.

Мы имѣемъ здѣсь примѣръ величины, въ которой, кромѣ ея размѣра, можно разсматривать еще направление; это — разстояніе, считаемое по какой-нибудь линіи (напр., по желѣзной дорогѣ) отъ определенного на ней мѣста (напр., отъ станціи Вологое). Разстояніе это можно считать и въ одномъ направленіи (напр., къ Москвѣ), и въ другомъ, противоположномъ (напр., къ Петербургу). Обыкновенныя (арифметическія) числа не достаточны для выраженія и размѣра, и направленія разстояній. Условимся въ подобныхъ случаяхъ поступать такъ

Назовемъ какое-нибудь одно изъ двухъ направленій Николаевской дороги (напр., направленіе отъ Петербурга къ Москвѣ) положительнымъ, а противоположное направленіе (отъ Москвы къ Петербургу) отрицательнымъ; сообразно этому разстоянія, считаемыя въ положительномъ направленіи, будемъ называть положительными разстояніями, а разстоянія, считаемыя въ отрицательномъ направленіи, будемъ называть отрицательными. Первые будемъ выражать числами со знакомъ $+$ (или вовсе безъ знака), а вторыя — числами со знакомъ $-$ ¹⁾. Такъ, если поѣздъ находится въ мѣстѣ, отстоящемъ на 100 верстъ отъ Вологова по направленію къ Москвѣ, то мы будемъ говорить, что его разстояніе отъ Вологова равно $+100$ вер. (или просто 100 вер.); если же поѣздъ находится, положимъ,

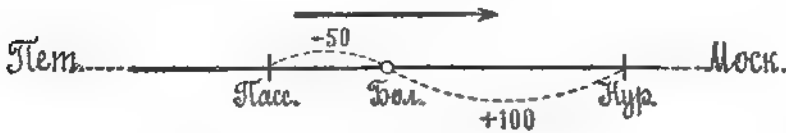
¹⁾ Можно было бы взять и какие-нибудь другіе знаки, но знаки $+$ и $-$ оказываются, какъ будетъ видно впоследствии, очень удобными.

на 50 вер. отъ Вологова по направленію къ Петербургу, то мы скажемъ, что его разстояніе отъ Вологова равно -50 вер. Здѣсь знаки $+$ и $-$, конечно, не означаютъ дѣйствій сложенія и вычитанія, а только служатъ условно для обозначенія направленій.

Выразимъ теперь нашу задачу такъ:

Извѣстно, что когда курьерскій поѣздъ Николаевской желѣзной дороги находился отъ Вологова на разстояніи $+100$ вер. (или просто 100 вер.), тогда пассажирскій поѣздъ этой дороги былъ отъ Вологова на разстояніи -50 вер. Какъ велико было тогда разстояніе между этими поѣздами?

Теперь задача выражена вполне точно, и отвѣтъ на нее получается опредѣленный (см. черт. 1, на которомъ стрѣлка указываетъ положительное направленіе дороги): поѣзда находились на разстояніи $100+50$, т.-е. 150 верстъ.



Черт. 1.

Задача 2. Термометръ въ полночь показывалъ 2 градуса, а въ полдень 5 градусовъ. На сколько градусовъ измѣнилась температура отъ полуночи до полудня?

И въ этой задачѣ условія выражены недостаточно полно; надо еще указать, 2 градуса т е п л а или 2 градуса х о л о д а показывалъ термометръ въ полночь, т.-е. вершина ртутнаго столбика въ термометрѣ была въ полночь на 2 дѣленія в ы ш е, или на 2 дѣленія н и ж е той черты, на которой стоитъ 0° ; подобныя же указанія должны быть сдѣланы и относительно температуры въ полдень. Если и въ полночь, и въ полдень термометръ указывалъ тепло, то температура за этотъ промежутокъ времени повысилась отъ 2 до 5 градусовъ, значитъ, она измѣнилась на 3 градуса; если же въ полночь термометръ указывалъ 2 градуса холода (ниже 0°), а въ полдень 5 градусами тепла (выше 0°), то температура повысилась на $2+5$. т.-е. на 7

градусовъ. Могло случиться и такъ, что въ полночь температура была 2° холода и въ полдень 5° тоже холода (тогда температура не повысилась, а понизилась на 3 градуса), или такъ, что въ полночь температура была 2° тепла, а въ полдень 5° холода (тогда температура понизилась на 7 градусовъ).

Въ этой задачѣ тоже рѣчь идетъ о величинѣ, и мѣсто еѣ п а п р а в л е н і е: число градусовъ температуры можно считать въ в е р х ѣ отъ нулевой черты термометра и в н и з ѣ отъ нея. Принято температуру выше 0° (тепло) считать положительной и обозначать числомъ градусовъ со знакомъ $+$, а температуру ниже 0° (холодъ) считать отрицательной и обозначать числомъ градусовъ со знакомъ $-$ (не будетъ недоразумѣнія, если первое число брать соеѣмъ безъ знака). Напр., если говорить, что термометръ на воздухѣ показываетъ -2° , а въ комнатѣ $+12^{\circ}$ (или просто 12°), то мы понимаемъ, что въ первомъ случаѣ вершина ртутнаго столбика стоитъ ниже 0° на 2 дѣленія, а во второмъ случаѣ выше 0° на 12 дѣлений.

Выразимъ теперь нашу задачу такъ: термометръ въ полночь показывалъ -2° , а въ полдень $+5^{\circ}$. На сколько градусовъ измѣнилась температура отъ полуночи до полудня?

Въ такомъ видѣ задача получаетъ вполне опредѣленный отвѣтъ: температура повысилась на $2+5$, т.-е. на 7 градусовъ.

Задача 3. Промежутокъ времени, отдѣлявшій день рожденія Андрея отъ 1-го января (цѣкаотораго года), былъ равенъ 63 днямъ, а промежутокъ времени, отдѣлявшій день рожденія Петра отъ того же 1-го января, составлялъ 46 дней. Сколько дней отдѣлило день рожденія Андрея отъ дня рожденія Петра?

Въ такомъ видѣ задача представляется неопредѣленною, такъ какъ неизвѣстно, родился ли Андрей на 63 дня р а н ѣ ш е 1-го января, или же на 63 дня п о с л ѣ 1-го января; равнымъ образомъ не сказано въ задачѣ, былъ ли день рожденія Петра за 46 дней до 1-го января, или 46 дней позже этого числа. Если Андрей и Петръ оба родились раньше, или оба послѣ 1-го января,

то день рожденія Петра отстоялъ отъ дня рожденія Андрея на 63—46, т.-е. на 17 дней; если Андрей родился раньше 1-го января, а Петръ послѣ этого числа (или наоборотъ), то ихъ дни рожденія раздѣлялись промежуткомъ въ 63+46, т.-е. въ 109 дней.

Можно сказать, что и въ этой задачѣ рѣчь идетъ о величинѣ, имѣющей п а п р а в л е н і е, хотя слову «направленіе» здѣсь нельзя придавать буквального значенія. Промежутокъ времени, отдѣлявшій день рожденія Андрея отъ 1-го января, можно понимать въ двухъ противоположныхъ смыслахъ (направленіяхъ): или какъ промежутокъ, слѣдовавшій за 1-мъ январемъ (тогда Андрей родился послѣ 1-го января), или какъ промежутокъ, предшествовавшій 1-му январю (тогда Андрей родился до 1-го января). То же самое можно сказать о промежуткѣ времени, отдѣлявшемъ день рожденія Петра отъ 1-го января.

Если условимся промежутки времени, слѣдовавшіе за 1-мъ январемъ, считать положительными и выражать ихъ числами со знакомъ + (или безъ знака), а промежутки времени, предшествовавшіе 1-му январю, считать отрицательными и выражать ихъ числами со знакомъ —, то задачу нашу можно высказать вѣднѣе точно, напр., такъ: промежутокъ времени, отдѣлявшій день рожденія Андрея отъ 1-го января, былъ равенъ —63 днямъ, а промежутокъ времени, отдѣлявшій день рожденія Петра отъ того же 1-го января, составлялъ +46 дней. Сколько дней раздѣляли дни рожденія Андрея и Петра?

Въ такомъ видѣ задача имѣетъ опредѣленный отвѣтъ; искомый промежутокъ времени равенъ $63+46=109$ днямъ.

Кромѣ величинъ, указанныхъ въ предыдущихъ задачахъ (расстояніе, температура, промежутокъ времени), многія другія также имѣютъ «направленіе», т.-е. онѣ могутъ быть разсматриваемы въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Таковы, напр.:

д о х о д ъ	въ противоположномъ смыслѣ будетъ	р а с х о д ъ;
в ы и г р ы ш ь	»	» п р о и г р ы ш ь;
п р и б ы л ь	»	» у б ы т о к ъ;
и м у щ е с т в о	»	» д о л г ъ и т. п.

Если доходъ, выигрышъ, прибыль, имущество... условимся считать величинами положительными и выражать ихъ числами

со знакомъ $+$ (или безъ знака), то расходъ, проигрышъ, убытокъ, долгъ... надо считать соответственно величинами того же рода, но отрицательными, и выражать ихъ числами со знакомъ $-$; тогда можно говорить, что расходъ есть отрицательный доходъ, проигрышъ есть отрицательный выигрышъ и т. д. При такомъ соглашеніи понятны будутъ, напр., слѣдующія словесныя выраженія: купецъ получилъ прибыли: въ январѣ $+200$ руб., въ февралѣ $+150$, въ мартѣ -50 руб. (значить, въ мартѣ купецъ получилъ убытку 50 руб.); или такія: у старшаго брата имущества было на $+50000$ руб., у средняго на $+30000$ руб., у младшаго на -5000 руб. (значить, у младшаго брата не было совсѣмъ имущества, а былъ долгъ въ 5000 руб.).

Должно однако замѣтить, что на ряду съ указанными величинами существуетъ очень много другихъ, въ которыхъ нельзя указать «направленія»; напр., нельзя понимать въ двухъ противоположныхъ смыслахъ такія величины, какъ объемъ, площадь, вѣсъ, цѣна и многія другія.

13. Алгебраическія числа. Числа, рассматриваемыя въ арифметикѣ, служатъ для выраженія такихъ величинъ, которыя не имѣютъ «направленія», или которыхъ направленіе не рассматривается (когда, напр., интересуются знать только размѣръ какого-нибудь разстоянія, а не направленіе, по которому его надо считать). Числа же, рассматриваемыя въ алгебрѣ, служатъ для выраженія величинъ, имѣющихъ «направленіе», когда, помимо размѣра величины, хотять еще указать и ея направленіе. Для этого величину, понимаемую въ какомъ-нибудь одномъ смыслѣ, выражаютъ числомъ съ предшествующимъ ему знакомъ $+$, а ту же величину, понимаемую въ противоположномъ смыслѣ, выражаютъ числомъ съ предшествующимъ ему знакомъ $-$.

Число съ предшествующимъ ему знакомъ $+$ (который, впрочемъ, можетъ быть и опускаемъ) наз. п о л о ж и т е л ь н ы м ъ; число съ предшествующимъ ему знакомъ $-$ наз. о т р и ц а т е л ь н ы м ъ. Такъ, $+10$, $+1/2$, $+0,3$ положительные числа, а -8 , $-5/7$, $-3,25$ отрицательныя числа.

Къ числамъ присоединяютъ еще 0 (нуль), не относя его ни къ положительнымъ, ни къ отрицательнымъ. Выраженія $+0$, -0 и просто 0 считаютъ равносильными.

Числа положительныя, отрицательныя и нуль мы будем называть алгебраическими числами или относительноыми въ отличіе ихъ отъ чиселъ арифметическихъ или обыкновенныхъ, которыя не имѣютъ передъ собой никакого знака ¹⁾.

Абсолютною величиною алгебраическаго числа называется это число, взятое безъ знака; такъ, абсолютная величина числа -10 есть 10 , абсолютная величина числа $+5$ есть 5 ; абсолютная величина нуля есть 0 .

Два алгебраическихъ числа считаются равными, если у нихъ одинаковы абсолютныя величины и знаки; въ противномъ случаѣ числа считаются неравными.

Должно помнить, что знаки $+$ и $-$, входящіе въ обозначенія алгебраическихъ чиселъ, не представляютъ собою знаковъ сложенія и вычитанія, а служатъ лишь знаками для указанія «направленія» измѣряемыхъ величинъ. Чтобы не могло произойти смѣшенія этихъ знаковъ со знаками сложенія и вычитанія, алгебраическое число вмѣстѣ съ его знакомъ заключаютъ въ скобки, напр., пишутъ такъ: $(+7)+(-3)$; въ такомъ изображеніи знаки, стоящіе внутри скобокъ, суть знаки алгебраическихъ чиселъ, а знакъ $+$, стоящій между скобками, есть знакъ сложенія.

Положительныя числа можно писать и безъ знака $+$; въ такомъ случаѣ они не будутъ отличаться отъ чиселъ арифметическихъ.

14. Изображеніе чиселъ помощью отрѣзковъ прямой. Для яснаго пониманія алгебраическихъ чиселъ полезно, говоря о такихъ числахъ, всегда представлять себѣ въ умѣ какія-нибудь изъ тѣхъ величинъ, для измѣренія которыхъ служатъ эти числа. Всего проще для этой цѣли брать отрѣзки прямой линіи, если условимся, помимо длины этихъ отрѣзковъ, принимать во вниманіе еще и ихъ направленіе.

Отрѣзкомъ прямой (или просто отрѣзкомъ) наз. часть какой-нибудь прямой линіи, ограниченная съ обѣихъ сторонъ, напр. (черт. 2), съ одной стороны точкою A , съ другой точкою B . Въ каждомъ отрѣзкѣ мы условимся различать: во-1-хъ,

¹⁾ Должно замѣтить однако, что въ высшей математикѣ терминъ „алгебраическое число“ употребляется въ другомъ значеніи, о которомъ въ элементарной математикѣ говорить не мѣсто.

д л и н у его (которая, конечно, можетъ быть больше и меньше), во-2-хъ, н а п р а в л е н і е, которое для данного отрѣзка можетъ быть двойное. Напримѣръ, во взятомъ нами отрѣзкѣ можно различать направленіе или отъ точки A къ точкѣ B (слѣва направо),



Черт. 2.

или, наоборотъ, отъ B къ A (справа налѣво). Если мы разсматриваемъ взятый отрѣзокъ въ направленіи отъ A къ B , то точку A мы будемъ называть н а ч а л о м ъ отрѣзка, а точку B его к о н ц о м ъ и будемъ обозначать такой отрѣзокъ такъ: AB , т. е. сначала будемъ писать ту букву, которая обозначаетъ начало отрѣзка; если же за начало отрѣзка мы беремъ точку B , а за конецъ точку A , т. е. если мы разсматриваемъ отрѣзокъ въ направленіи отъ B къ A , то мы его обозначимъ не AB , а BA .



Черт. 3.

На чертежѣ направленіе, на которое хотятъ обратить вниманіе, иногда изображается стрѣлкой, поставленной или надъ отрѣзкомъ (черт. 3 верхній), или на немъ самомъ, на концѣ его (черт. 3, нижній),

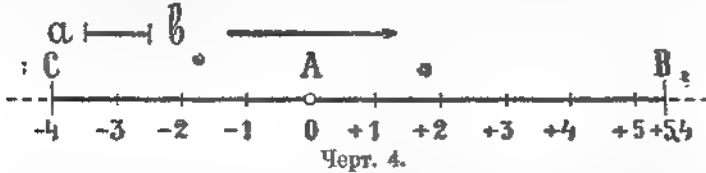
или же подъ отрѣзкомъ (черт. 8 и 9).

Отрѣзки прямой, въ которыхъ, помимо ихъ длины, мы обращаемъ вниманіе на направленіе, мы будемъ называть н а п р а в л е н н ы м и о т р ѣ з к а м и ¹⁾.

Такими отрѣзками мы наглядно можемъ выражать алгебраическія числа слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ какую-нибудь прямую (удобнѣе всего — горизонтальную, черт. 4) и условимся, какое изъ двухъ направленій этой прямой считать положительнымъ. Примемъ, напр., направленіе слѣва направо (указанное стрѣлкой) за положительное; тогда противоположное направленіе — справа налѣво — мы будемъ считать отрицательнымъ. Далѣе, примемъ какую-нибудь небольшую длину ab (изобра-

¹⁾ Они наз. также „векторами“.

женную на чертежѣ) за единицу длины. Пусть теперь дано какое-нибудь положительное число, напр., $+5,4$. Возьмемъ на нашей прямой произвольную точку A и отложимъ вправо отъ нея $5,4$ единицы длины, равныхъ ab . Тогда получимъ отръзокъ AB ,



длина котораго равна $5,4$ единицамъ и направленіе положительное. Этотъ отръзокъ и выразить намъ наглядно число $+5,4$, такъ что мы можемъ писать: $\overline{AB} = 5,4$. Здѣсь, помѣщая надъ AB горизонтальную черту, мы хотимъ указать, что разумѣемъ не самый направленный отръзокъ AB , а алгебраическое число, измѣряющее этотъ отръзокъ, такъ что написанное выше равенство подробно можно высказать такъ: «алгебраическое число, измѣряющее направленный отръзокъ AB , есть $+5,4$ ».

Возьмемъ теперь какое-нибудь отрицательное число, напр. -4 . Чтобы изобразить его наглядно, отложимъ отъ той же точки A влѣво 4 единицы длины. Тогда получимъ отръзокъ AC , котораго длина равна 4 единицамъ, а направленіе отрицательное; значитъ, этотъ отръзокъ выражаетъ число -4 , и мы можемъ писать: $\overline{AC} = -4$. Очевидно, что такимъ путемъ мы всякое алгебраическое число можемъ выразить (на самомъ дѣлѣ или только мысленно) направленнымъ отръзкомъ. Въ большинствѣ случаевъ нѣтъ надобности въ дѣйствительности откладывать какую-нибудь единицу длины, а достаточно только вообразить, что такое отложеніе сдѣлано.

Можно представить себѣ, что всѣ алгебраическія числа выражены направленными отръзками, отложенными на одной и той же прямой (черт. 4) отъ одной и той же ея точки A , принятой за начало отръзковъ. Тогда на той части прямой, которая расположена направо отъ A , изобразятся рядъ положительныхъ чиселъ: $+1, +2, +3, \dots$, а на части прямой, расположенной влѣво отъ A , изобразятся отрицательныя части: $-1, -2, -3, \dots$. Прямую эту надо представлять себѣ безконечною въ обѣ стороны (хотя на чертежѣ по необходимости прихо-

дится ограничивать ее и справа, и слѣва). Число н у л ь выражается на этой прямой не отрѣзкомъ, а одною точкою A . Такую прямую мы условимся называть **числовой прямою**.

Такъ какъ направленіе отрѣзковъ, выражающихъ числа со знакомъ $+$, противоположно направленію отрѣзковъ, выражающихъ числа со знакомъ $-$, то и самые эти знаки принято называть, **противоположными знаками**. Всякія два числа, какъ $+3$, и -3 , $+1/2$ и $-1/2$ и т. п., у которыхъ знаки противоположны, а абсолютныя величины одинаковы, мы будемъ называть **противоположными числами**.

Если два направленные отрѣзка AB и CD (черт. 5) имѣютъ одинаковую длину и одно и то же направленіе, то они считаются



Черт. 5.

равными (подразумѣвается: по величинѣ и по направленію). Если такіе отрѣзки измѣрены одною и тою же единицею длины, то, конечно, въ результатъ получаются равныя алгебраическія числа, такъ что можно написать: $\overline{AB} = \overline{CD}$.

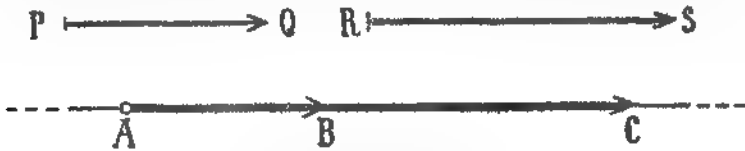
15. Сложеніе направленныхъ отрѣзковъ.

Чтобы сложить два направленныхъ отрѣзка поступимъ такъ: на числовой прямой отъ произвольной ея точки отложимъ отрѣзокъ, равный первому слагаемому отрѣзку; затѣмъ отъ конца отложеннаго отрѣзка отложимъ на той же прямой другой отрѣзокъ, равный второму слагаемому отрѣзку; тогда отрѣзокъ, у котораго начало есть начало перваго отложеннаго отрѣзка, а конецъ — конецъ втораго отложеннаго отрѣзка, принимается за сумму этихъ двухъ отрѣзковъ.

Приложимъ это опредѣленіе суммы къ слѣдующимъ 4-мъ частнымъ случаямъ.

1°. Пусть требуется найти сумму двухъ положительныхъ отрѣзковъ PQ и RS (черт. 6). Для этого возьмемъ произвольную точку A на какой-нибудь прямой и на ней отложимъ отрѣзокъ AB , равный PQ ; затѣмъ отъ конца B этого отрѣзка

отложимъ на той же прямой отрезокъ BC , равный RS . Полученный послѣ этого отрезокъ AC есть сумма отрезковъ AB и BC



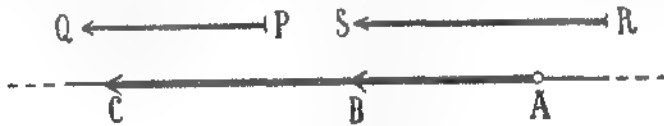
Черт. 6.

и, слѣд., сумма равныхъ имъ отрезковъ PQ и RS , такъ что можно писать:

$$AC = AB + BC = PQ + RS.$$

Очевидно, что сумма положительныхъ отрезковъ есть также положительный отрезокъ.

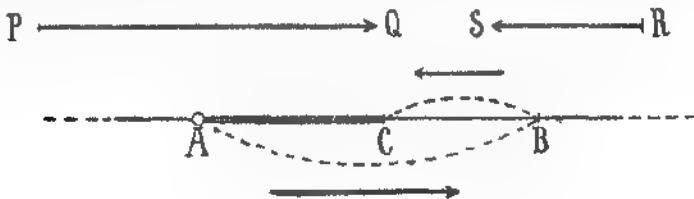
2°. Пусть требуется найти сумму $PQ + RS$ двухъ отрицательныхъ отрезковъ (черт. 7). Построеніе будетъ такое же, какъ и въ первомъ случаѣ, съ тою разницей, что отрезки теперь



Черт. 7.

должны откладываться въ отрицательномъ направленіи. Очевидно, что сумма отрицательныхъ отрезковъ представляетъ собою также отрицательный отрезокъ.

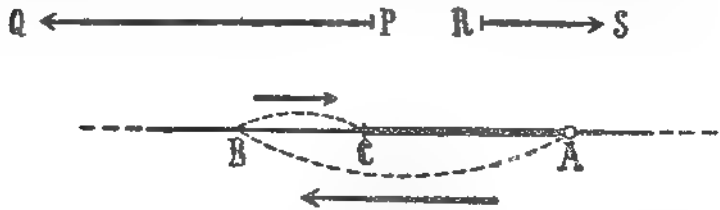
3°. Найдемъ сумму отрезковъ PQ и RS (черт. 8), изъ которыхъ первый (PQ) положительный, а второй (RS) отрицательный.



Черт. 8.

Отложимъ отъ точки A вправо положительный отрезокъ $AB=PQ$ и затѣмъ отъ точки B отложимъ влево отрицательный отрезокъ $BC=RS$. Получившійся отрезокъ AC есть сумма $AB+BC$ и, слѣд., сумма $PQ+RS$. Эта сумма у насъ оказалась положительной, благодаря тому, что длина положительнаго отрезка болѣе длины отрицательнаго; если бы первая длина была меньше второй, то сумма, очевидно, оказалась бы отрицательной.

4°. Пусть, наконецъ, даны отрезки PQ и RS (черт. 9), изъ которыхъ первый отрицательный, а второй положительный.



Черт. 9.

Построивъ $AB=PQ$ и $BC=RS$, получимъ сумму AC . Эта сумма оказалась у насъ отрицательной, благодаря тому, что длина отрицательнаго отрезка больше длины положительнаго; если бы первая длина была бы меньше второй, то сумма, очевидно, оказалась бы положительной ¹⁾).

Замѣтимъ, что если бы въ случаѣ 3° или въ случаѣ 4° длина положительнаго отрезка была равна длинѣ отрицательнаго, то точка C совпала бы съ точкой A , и тогда сумма обратилась бы въ 0; такимъ образомъ, сумма 2-хъ противоположно направленныхъ отрезковъ съ одинаковой абсолютной длиной равна нулю.

Умѣя находить сумму 2-хъ направленныхъ отрезковъ, мы легко можемъ получить сумму 3-хъ, 4-хъ и болѣе отрезковъ; для этого надо сначала найти сумму первыхъ двухъ слагаемыхъ отрезковъ, затѣмъ сумму этой суммы и

¹⁾ Просмотрѣвъ всѣ 4 случая сложения отрезковъ AB и BC , мы видимъ, что, какъ бы ни были расположены на прямой три точки A , B и C , всегда $AB+BC=AC$.

третьяго слагаемаго отрѣзка, далѣе сумму послѣдней суммы и четвертаго отрѣзка и т. д. ¹⁾).

Сумма отрѣзковъ обладаетъ перемѣстительнымъ свойствомъ, т.-е. она не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ. Предлагаемъ самимъ учащимся убѣдиться въ этомъ, перемѣстивъ слагаемые отрѣзки въ указанныхъ выше 4 случаяхъ нахожденія суммы двухъ отрѣзковъ.

Сумма направленныхъ отрѣзковъ обладаетъ также и сочетательнымъ свойствомъ, т.-е. она не измѣнится, если нѣсколько слагаемыхъ отрѣзковъ мы замѣнимъ ихъ суммою ²⁾).

16. Сложеніе направленныхъ величинъ вообще. Подобно указанному сложенію направленныхъ отрѣзковъ можно складывать также и другія направленные величины, напр., прибыль и убытокъ, доходъ и расходъ, выигрышъ и проигрышъ и т. п. Существенная особенность такого сложения состоитъ въ томъ, что двѣ противоположно направленные величины, имѣющія одинаковый абсолютный размѣръ, при сложеніи взаимно уничтожаются (даютъ въ суммѣ нуль); напр., 5 рублей прибыли уничтожаются 5-ю рублями убытку, 10 рублей выигрыша уничтожаются 10-ю рублями проигрыша и т. п.

Сложеніе алгебраическихъ чиселъ.

17. Опредѣленіе. Суммою алгебраическихъ чиселъ называется такое число, которое выражаетъ сумму направленныхъ отрѣзковъ (и вообще направленныхъ величинъ), выраженныхъ данными числами.

¹⁾ Если всѣ слагаемые отрѣзки перенесены на одну прямую и расположены такъ, что конецъ *B* перваго отрѣзка *AB* принять за начало втораго отрѣзка *BC*, конецъ *C* этого отрѣзка принять за начало третьяго *CD* и т. д., то, какъ бы ни были расположены на прямой точки *A, B, C, D, E, ...*, всегда будемъ имѣть:

$$AB + BC + CD + DE = AE.$$

Дѣйствительно, $AB + BC$, какъ мы видѣли, равно AC ; точно такъ же $AC + CD = AD$ и $AD + DE = AE$.

²⁾ Напр., сумма $AB + BC + CD$, равная, какъ мы знаемъ, всегда отрѣзку AD , не измѣнится, если мы сначала сложимъ BC и CD (получимъ отрѣзокъ BD) и затѣмъ эту сумму приложимъ къ AB ($AB + BD = AD$). Такимъ образомъ,

$$AB + BC + CD = AB + (BC + CD).$$

Напримѣръ, сумма: $(+8)+(-5)+(-2)$ есть число, выражающее сумму трехъ направленныхъ отрѣзковъ, пѣз которыхъ одинъ измѣряется числомъ $+8$, другой числомъ -5 и третій числомъ -2 (предполагается, конечно, что всѣ измѣренія сдѣланы при помощи одной и той же единицы).

Дѣйствіе, посредствомъ котораго находится сумма пѣсколькихъ чиселъ, наз. сложениемъ.

18. Сложение двухъ чиселъ. Для сложения двухъ алгебраическихъ чиселъ мы дадимъ слѣдующія два правила.

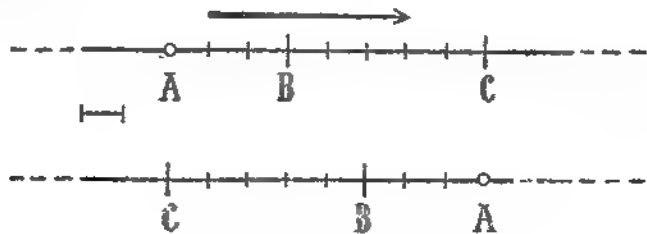
Правило 1-е. Чтобы сложить два алгебраическія числа одинаковыхъ знаковъ, складываютъ ихъ абсолютныя величины и предъ суммою ставятъ тотъ знакъ, какой имѣютъ слагаемыя.

Такъ: $(+3)+(+5)=+8$ $(-3)+(-5)=-8$.

Дѣйствительно, сумма двухъ отрѣзковъ прямой: $\overline{AB}=+3$ и $\overline{BC}=+5$ (черт. 10, верхній) есть отрѣзокъ $\overline{AC}=+8$ и сумма двухъ отрѣзковъ $\overline{AB}=-3$ и $\overline{BC}=-5$ (нижній чертежъ) составляетъ отрѣзокъ $\overline{AC}=-8$.

Подобно этому 3 рубля прибыли вмѣстѣ съ 5 рублями прибыли составляютъ 8 руб. прибыли; 3 руб. расхода вмѣстѣ съ 5 руб. расхода составляютъ 8 руб. расхода и т. п.

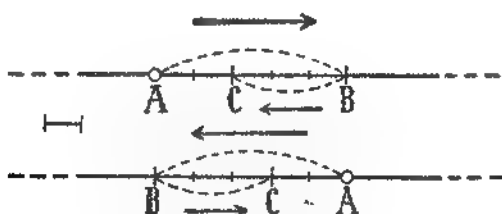
Такъ какъ положительныя числа пишутся и безъ знака, то вмѣсто равенства: $(+3)+(+5)=+8$ можно написать болѣе простое $3+5=8$, что согласуется со сложениемъ арифметическихъ чиселъ.



Черт. 10.

Правило 2-е. Чтобы сложить два алгебраических числа противоположных знаков, находят разность их абсолютных величин и перед нею ставят знак того из слагаемых чисел, у которого абсолютная величина больше.

Такъ: $(+5)+(-3)=+2$; $(-5)+(+3)=-2$.



Черт. 11.

Дѣйствительно, сложивъ два отръзка (черт. 11, верхній), $\overline{AB}=+5$ и $\overline{BC}=-3$, мы получимъ сумму $\overline{AC}=+2$, и, сложивъ (нижній чертежъ) два отръзка: $\overline{AB}=-5$ и $\overline{BC}=+3$, найдемъ сумму $\overline{AC}=-2$.

Подобно этому 5 руб. дохода вмѣстѣ съ 3 руб. расхода равносильны 2 руб. дохода; 5 руб. долгу при 3 руб. имущества равносильны 2 руб. долгу и т. п.

Отбросивъ знакъ $+$ передъ положительными числами, мы можемъ написанныя выше равенства переписать короче:

$$5+(-3)=2; \quad (-5)+3=-2.$$

Слѣдствіе. Сумма двухъ противоположныхъ чиселъ равна нулю. Такъ:

$$(+3)+(-3)=0; \quad (-8)+(+8)=0.$$

Напримѣръ, если я въ одной игрѣ выигралъ 3 руб., а въ другой проигралъ 3 руб., то въ результатѣ я ничего не выигралъ и ничего не проигралъ.

Къ указаннымъ правиламъ сложения надо добавять еще слѣдующее соглашеніе:

Прибавить 0 къ какому-нибудь числу или прибавить къ 0 какое-нибудь число значитъ оставить это число безъ измѣненія.

$$\begin{aligned} \text{Такъ: } (+3)+0 &= +3; & (-3)+0 &= -3; & 0+(+5) &= +5; \\ & & 0+(-2) &= -2; & 0+0 &= 0. \end{aligned}$$

19. Сложение трехъ и болѣе чиселъ. Сложение нѣсколькихъ алгебраическихъ чиселъ, данныхъ въ известной послѣдовательности, производится такъ: сначала находятъ сумму двухъ первыхъ слагаемыхъ, къ ней прибавляютъ третье слагаемое, затѣмъ четвертое и т. д.

Пусть, напр., требуется найти сумму:

$$(+8)+(-5)+(-4)+(+3),$$

которую можно выразить короче такъ:

$$8+(-5)+(-4)+3.$$

Сложимъ два первыхъ слагаемыхъ: $8+(-5)=3$; приложимъ третье слагаемое: $3+(-4)=-1$; добавимъ четвертое слагаемое: $(-1)+3=2$.

Впрочемъ такого порядка сложения нѣтъ надобности всегда придерживатся, какъ это будетъ видно изъ свойствъ суммы, которыя мы сейчасъ укажемъ.

20. Свойства суммы. Сумма чиселъ алгебраическихъ, какъ и сумма чиселъ арифметическихъ, обладаетъ свойствами перемѣстительныхъ и сочетательныхъ.

1^o. Перемѣстительное свойство: сумма не измѣняетъ ся отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.

$$\text{Напримѣръ: } (-4)+(+3)+(-1)+(+5)=+3;$$

$$(-4)+(-1)+(+5)+(+3)=+3;$$

$$(+5)+(-1)+(-4)+(+3)=+3 \text{ и т. д.}$$

Если, напр., торговецъ, продавъ 4 предмета, получилъ прибыли на одномъ изъ нихъ 3 руб., на другомъ 5 руб., на третьемъ же предметѣ имѣлъ убытокъ 4 руб. и на четвертомъ также убытокъ 1 руб., то для него безразлично, въ какомъ порядкѣ слѣдовали эти продажи: проданы ли были сначала тѣ предметы, на которыхъ получена прибыль, или сначала тѣ, которые дали убытокъ, или какъ-нибудь иначе; при всякомъ порядкѣ окажется одно и то же, именно: послѣ 4-хъ продажъ торговецъ получилъ прибыли 3 рубля.

Вообще, если a, b, c, \dots означаютъ какія-нибудь алгебраическія числа, то:

$$a+b+c\dots=a+c+b+\dots=b+a+c\dots$$

2°. **Сочетательное свойство:** сумма не измѣняется, если въ сколъко слагаемыхъ мы замѣнимъ ихъ суммой.

Возьмемъ, напр., такую задачу: торговецъ получилъ прибыли: въ первый день +10 руб., во второй день —3 руб., въ третій день +12 руб.; сколько прибыли получилъ торговецъ за всѣ эти три дня?

Мы можемъ узнать это различными способами; напр., узнаемъ сначала, сколько прибыли получилъ торговецъ за первые два дня, и затѣмъ добавимъ къ этой прибыли ту, которую онъ получилъ на третій день:

$$[(+10)+(-3)]+(+12)=(+7)+(12)=+19.$$

Но тотъ же результатъ, очевидно, мы получимъ, если узнаемъ сначала, сколько прибыли имѣлъ торговецъ за два послѣдніе дня, и потомъ эту прибыль приложимъ къ той, которую онъ имѣлъ за первый день:

$$(+10)+[(-3)+(12)]=(+10)+(9)=+19.$$

Наконецъ, мы можемъ сдѣлать и такъ: узнаемъ сначала, какъ велика прибыль за первый и третій день вмѣстѣ, а потомъ добавимъ ее къ прибыли второго дня:

$$(-3)+[(+10)+(12)]=(-3)+(22)=+19.$$

Во всѣхъ случаяхъ мы получаемъ одно и то же число +19.

Вообще, если a , b , c означаютъ какія-нибудь алгебраическія числа, то сочетательное свойство въ примѣненіи къ суммѣ трехъ слагаемыхъ можно выразить такую формулой:

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Читая это равенство справа налѣво, мы можемъ высказать сочетательное свойство такъ:

чтобы прибавить сумму къ какому-нибудь числу, достаточно къ этому числу прибавить каждое слагаемое одно за другимъ.

Слѣдствіе. Чтобы вычислить сумму алгебраическихъ чиселъ, можно найти сумму всѣхъ положительныхъ слагаемыхъ, за

тѣмъ сумму всѣхъ отрицательныхъ слагаемыхъ и эти двѣ суммы соединить въ одну.

Напримѣръ, чтобы найти сумму:

$$(-4) + (+3) + (-1) + (+5),$$

мы можемъ сгруппировать слагаемыя такъ:

$$[(+3) + (+5)] + [(-4) + (-1)] = (+8) + (-5) = +3.$$

Полезно замѣтить еще слѣдующее свойство суммы.

3°. **Перемѣна знаковъ у слагаемыхъ:** если у каждаго слагаемаго перемѣнимъ знакъ на противоположный, то и у суммы перемѣнится знакъ на противоположный.

$$\begin{array}{l|l} \text{Такъ: } (+5) + (+3) = +8; & (+5) + (-3) = +2; \\ (-5) + (-3) = -8; & (-5) + (+3) = -2. \end{array}$$

Вычитаніе алгебраическихъ чиселъ.

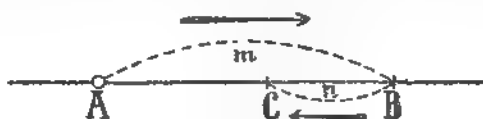
21. Опредѣленіе. Вычитаніе алгебраическихъ чиселъ (какъ и ариметическихъ) есть дѣйствіе (обратное сложенію), посредствомъ котораго по данной суммѣ двухъ слагаемыхъ и одному изъ этихъ слагаемыхъ отыскивается другое.

Такъ, вычесть изъ +3 число -2 значитъ найти такое алгебраическое число x , чтобы сумма $(-2) + x$ или — что все равно — сумма $x + (-2)$ равнялась +3; такое число есть, и притомъ только одно, именно +5, такъ какъ $(+5) + (-2) = +3$, и никакое иное число, сложенное съ -2, не даетъ въ суммѣ +3.

22. Вычитаніе бѣльшаго числа изъ меньшаго. Въ ариметикѣ вычитаніе невозможно, если вычитаемое превосходитъ уменьшаемое. Въ области алгебраическихъ чиселъ это ограниченіе должно быть отброшено (если ариметическія числа будемъ отождествлять съ числами положительными). Пусть, напр., требуется изъ 7 вычесть 10. Это значитъ: найти такое алгебраическое число x , которое, сложенное съ вычитаемымъ 10, даетъ въ суммѣ уменьшаемое 7. Такое число существуетъ, и притомъ только одно, именно отрицательное число -3, такъ какъ, согласно правилу сложенія алгебраическихъ чиселъ, $10 + (-3) = +7 = 7$, и никакое иное число, сложенное съ 10, не можетъ составить числа 7; значитъ: $7 - 10 = -3$. Подобно

этому: $20-30=-10$; $5-7\frac{1}{2}=-2\frac{1}{2}$; $0-8=-8$; $a-(a+m)=-m$
и т. п. Такимъ образомъ, разность отъ вычитанія большаго
арифметическаго числа изъ меньшаго равна избытку большаго
числа надъ меньшимъ, взятому со знакомъ —.

Примѣръ. Пѣшеходъ прошелъ m верстъ
отъ точки A до точки B (черт. 12); затѣмъ,



Черт. 12.

повернувъ назадъ, онъ прошелъ еще n
верстъ до точки C . Какъ велико разстоя-
нiе между A и C ?

Искомое разстоянiе равно $m-n$ верстъ. Вычислимъ эту раз-
сть для слѣдующихъ 3 частныхъ случаевъ. 1) $m=15$, $n=5$;

да $m-n=15-5=10$. Въ этомъ случаѣ точка C лежитъ вправо

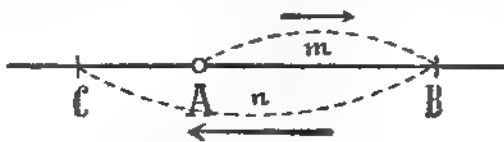
A на разстоянiи 10 верстъ отъ неѣ. 2) $m=15$; $n=15$; тогда
 $-n=15-15=0$. Въ этомъ случаѣ точка C совпадаетъ съ A ,

слѣд., ея разстоянiе отъ A равно нулю. 3) $m=15$, $n=20$;

да $m-n=15-20=-5$. Въ этомъ случаѣ разстоянiе точки C

A надо считать по противоположному направленiю, т.-е.

зѣво отъ A (черт. 13).



Черт. 13.

23. Общее правило вычитанiя. Чтобы вычесть
кое-нибудь число, достаточно прибавить къ уменьшаемому
то, противоположное вычитаемому.

Для вывода этого правила рассмотримъ особо 3 случая:
когда вычитаемое положительное число, 2) когда вычитаемое
отрицательное число и 3) когда оно есть 0.

1) Пусть отъ какого-нибудь алгебраическаго числа a требуется вычесть положительное число $+3$ (или просто 3); это значитъ: требуется найти число x , которое, сложенное съ $+3$, дастъ a . Такое число равно суммѣ $a+(-3)$, потому что, приложивъ къ этой суммѣ число $+3$, получимъ уменьшаемое a .

Дѣйствительно, согласно сочетательному свойству мы можемъ написать:

$$a+(-3)+(+3)=a+[(-3)+(+3)].$$

Но сумма противоположныхъ чиселъ -3 и $+3$ равна 0; значитъ, мы получимъ въ суммѣ $a+0$, что составляетъ просто a .

Такимъ образомъ: $a-(+3)=a+(-3)$,
и вообще: $a-(+b)=a+(-b)$.

Значить, вмѣсто того, чтобы вычитать число $+b$, можно прибавить противоположное число $-b$.

2) Пусть изъ того же числа a требуется вычесть отрицательное число -5 ; это значитъ: найти число x , которое, сложенное съ -5 , дастъ уменьшаемое a . Такое число равно суммѣ $a+(+5)$ потому что, приложивъ къ этой суммѣ вычитаемое -5 , получимъ уменьшаемое a :

$$a+(+5)+(-5)=a[(+5)+(-5)]=a+0=a.$$

Такимъ образомъ: $a-(-5)=a+(+5)$,
и вообще: $a-(-b)=a+(+b)$.

Значить, вмѣсто того, чтобы вычитать число $-b$, можно прибавить противоположное число $+b$.

3) Наконецъ, общее правило вычитанія примѣнимо и къ тому случаю, когда вычитаемое есть 0; надо только имѣть въ виду, что число, противоположное нулю, есть тоже число 0.

Такимъ образомъ:

$$a-0=a+0=a.$$

Замѣтимъ, что правило это не противорѣчитъ вычитанію, рассматриваемому въ ариемстикѣ, а также и вычитанію большаго числа изъ меньшаго, указанному въ предыдущемъ параграфѣ; такъ:

$$10-2=8 \text{ и } 10+(-2)=8, \\ 10-12=-2 \text{ и } 10+(-12)=-2.$$

Примѣры. 1) $(+10)-(-2)=(+10)+(+2)=+12$;
2) $(-10)-(+2)=(-10)+(-2)=-12$;
3) $(-10)-(-2)=(-10)+(+2)=-8$.

24. Другое выраженіе правилъ сложенія и вычитанія. Правила сложенія и вычитанія, данныя нами раньше (§§ 18, 23), можно замѣнить другими, болѣе удобными для практическаго примѣненія. Эти правила слѣдующія:

1°. Чтобы прибавить положительное число, достаточно прибавить его абсолютную величину.

Пусть, напр., требуется къ $+7$ прибавить $+3$; согласно 1-му правилу сложенія (§ 18) сумма будетъ $+10$. Но то же самое число мы получимъ, если къ $+7$ приложимъ абсолютную величину числа $+3$, такъ какъ $+7+3=7+3=10$.

Точно такъ же, согласно второму правилу сложенія, сумма $(-7)+(+3)$ равна -4 ; по ту же сумму мы получимъ, прибавивъ къ -7 число 3, такъ какъ $(-7)+3=-4$.

2°. Чтобы вычесть положительное число, достаточно вычесть его абсолютную величину.

Такъ, разность $(+7)-(+10)$, согласно общему правилу вычитанія (§ 23), равна суммѣ $(+7)+(-10)$, т. е. числу -3 ; но то же число мы получимъ, если изъ $+7$ вычтемъ абсолютную величину числа $+10$, такъ какъ $(+7)-10=7-10=-3$. Точно такъ же, согласно общему правилу вычитанія, разность $(-7)-(+3)$ равна суммѣ $(-7)+(-3)$, т. е. числу -10 ; но то же число мы получимъ, если изъ -7 вычтемъ 3, такъ какъ $-7-3=-10$.

3°. Чтобы прибавить отрицательное число, достаточно отнять его абсолютную величину.

Такъ: $(+7)+(-10)=-3$ и $+7-10=7-10=-3$
 $(-7)+(-10)=-17$ и $-7-10=-17$.

4°. Чтобы вычесть отрицательное число, достаточно прибавить его абсолютную величину.

Такъ: $(+5)-(-3)=(+5)+(+3)=+8$ и $5+3=8$,
 $(-5)-(-3)=(-5)+(+3)=-2$ и $-5+3=-2$.

25. Формулы двойныхъ знаковъ. Обозначимъ абсолютную величину какого-нибудь алгебраическаго числа

через a ; тогда 4 правила, изложенныя въ предыдущемъ параграфѣ, мы можемъ выразить такими краткими формулами:

$$\begin{array}{ll} 1) +(+a)=+a, & 3) +(-a)=-a, \\ 2) -(+a)=-a, & 4) -(-a)=+a. \end{array}$$

Формулы эти (ихъ можно назвать формулами двойныхъ знаковъ) выражаютъ только то, что раньше мы выразили словесно 4-мя правилами. Но ихъ можно выразить еще иначе такъ: если, заключивъ въ скобки алгебраическое число, поставимъ передъ скобками знакъ $+$, то получимъ выраженіе, равносильное числу, стоящему въ скобкахъ (формулы 1-я и 3-я), если же передъ скобками поставимъ знакъ $-$, то будемъ имѣть выраженіе, равносильное числу, противоположному тому, которое стоитъ внутри скобокъ (формулы 2-я и 4-я).

$$\begin{array}{ll} \text{Такъ:} & +(+5) \text{ равносильно } +5 \\ & +(-5) \quad \text{»} \quad -5 \\ & -(+5) \quad \text{»} \quad -5 \\ & -(-5) \quad \text{»} \quad +5 \end{array}$$

Вообще, обозначивъ буквою m не абсолютную величину алгебраическаго числа, а само это число, мы можемъ сказать, что выраженіе $+m$ равносильно числу m , а выраженіе $-m$ равносильно числу, противоположному m .

26. Замѣчаніе. Формулы двойныхъ знаковъ, указанныя въ предыдущемъ параграфѣ, остаются вѣрными и тогда, когда въ нихъ на мѣсто буквы a подставимъ какое-нибудь алгебраическое число. Возьмемъ, напр., формулу 4-ю: $-(-a)=+a$ и подставимъ въ нее на мѣсто a число -2 . Тогда получимъ такое равенство:

$$-[-(-2)] = +(-2).$$

Такъ какъ выраженіе $-(-2)$ равносильно $+2$, то лѣвая часть этого равенства есть то же самое, что $-(+2)$, а это выраженіе даетъ -2 , но и правая часть равенства даетъ -2 ; значитъ, равенство это вѣрно. Подобнымъ же образомъ можно провѣрить и всѣ другія формулы.

27. Алгебраическая сумма. Разность всякихъ двухъ чиселъ можетъ быть представлена въ видѣ суммы. Напримеръ, разность $7-3$ можетъ быть написана такъ: $7+(-3)$, или такъ: $(+7)+(-3)$; разность $(+2)-(-3)$ можетъ быть написана такъ: $(+2)+(+3)$.

Подобно этому, всякое выраженіе, представляющее собою рядъ послѣдовательныхъ сложений и вычитаній, можетъ быть представлено въ видѣ суммы. Напримѣръ, выраженіе

$$20-5+3-7$$

можетъ быть написано такъ:

$$20+(-5)+3+(-7), \text{ или } (+20)+(-5)+(+3)+(-7).$$

Сумма, въ которой слагаемыя могутъ быть числами положительными, отрицательными и равными нулю, называется алгебраическою суммою въ отличіе отъ арифметической, въ которой слагаемыя всегда числа положительные.

Такъ какъ алгебраическая сумма представляетъ собою сумму алгебраическихъ чиселъ, то она обладаетъ всѣми свойствами, указанными нами для суммы алгебраическихъ чиселъ (§ 20).

28. Сравненіе алгебраическихъ чиселъ по величинѣ. Опредѣленіе: число a считается большимъ числа b тогда, когда разность $a-b$ положительное число; число a считается меньшимъ числа b тогда, когда разность $a-b$ отрицательное число.

Опредѣленіе это находится въ согласіи съ нашимъ понятіемъ о большемъ и меньшемъ въ примѣненіи къ арифметическимъ числамъ. Мы говоримъ, напр., что 10 больше 7, или что 7 меньше 10, разумѣя при этомъ, что число 10 включаетъ въ себѣ, какъ часть, число 7 и что, слѣд., отъ 10 можно отдѣлить 7, при чемъ останется еще нѣкоторое число, тогда какъ отъ 7 нельзя отдѣлить 10; но это, другими словами, означаетъ, что разность $10-7$ есть положительное число, тогда какъ разность $7-10$ есть отрицательное число.

Изъ данного опредѣленія можно вывести слѣдующія свѣдѣнія:

1) Всякое положительное число больше всякаго отрицательнаго, потому что разность между первымъ и вторымъ всегда положительна; такъ, $+3 > -5$, потому что разность $(+3)-(-5)$, равная суммѣ $3+5$, есть число положительное.

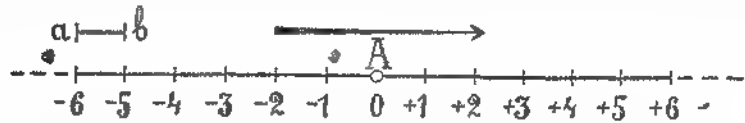
2) Всякое положительное число больше

нуля по той же причинѣ; напримѣръ, $+2 > 0$, такъ какъ $(+2) - 0 = +2$.

3) Всякое отрицательное число меньше нуля, потому что разность между первымъ и вторымъ всегда отрицательна; напр., $-3 < 0$, такъ какъ $(-3) - 0 = -3$.

4) Изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ то больше, у котораго абсолютная величина меньше; напримѣръ, -7 больше -9 , такъ какъ разность $(-7) - (-9)$, равная $(-7) + 9 = 9 - 7$, есть число положительное.

Для яснаго представленія сравнительной величины алгебраическихъ чиселъ всего лучше обратиться къ наглядному изображенію ихъ помощью направленныхъ отрѣзковъ прямой, какъ это было нами указано раньше (§ 14). Выбравъ произвольную единицу длины ab (черт. 14), вообразимъ, что на неограниченной



Черт. 14.

прямой вправо отъ какой-нибудь ея точки A , принятой за начало, отложены отрѣзки, изображающіе положительные числа $+1, +2, +3, +4, \dots$, а влѣво отъ той же точки отложены отрѣзки, изображающіе отрицательные числа $-1, -2, -3, -4, \dots$. Тогда, двигаясь по этой прямой слѣва направо (какъ указываетъ стрѣлка на чертежѣ), мы будемъ постоянно переходить отъ чиселъ меньшихъ къ большимъ, а двигаясь въ обратномъ направленіи—справа налѣво—будемъ постоянно переходить отъ чиселъ большихъ къ меньшимъ.

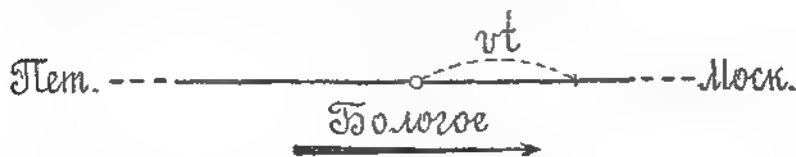
Умноженіе алгебраическихъ чиселъ.

29. Задача на умноженіе алгебраическихъ чиселъ. Въ полдень поѣздъ Николаевской желѣзной дороги (соединяющей Петербургъ съ Москвою) прослѣдовалъ черезъ станцію Бологое (расположенную приблизительно посредиѣ между Петербургомъ и Москвою). Опредѣлите мѣсто, въ которомъ находился этотъ поѣздъ въ мо-

ментъ времени, отстоящій отъ полудня (того же дня) на t часовъ, если известно, что поѣздъ двигался со скоростью v верстъ въ часъ (предполагается для простоты, что поѣздъ двигался безостановочно).

Положимъ, что въ этой задачѣ буквы t и v означаютъ какія-нибудь арифметическія числа (пусть, напр., скорость v поѣзда была 40 верстъ въ часъ, а моментъ времени, въ который требуется опредѣлить мѣстоахожденіе поѣзда, отстоялъ отъ полудня на 3 часа). Тогда въ отвѣтъ на вопросъ задачи мы только можемъ сказать, что въ указанный моментъ времени поѣздъ находился на такомъ разстояніи отъ Бологова, какое онъ можетъ пройти въ t часовъ, т.е. на разстояніи, равномъ vt верстъ. Но мы не можемъ сказать, нужно ли это разстояніе считать отъ Бологова по направленію къ Москвѣ, или по направленію къ Петербургу, такъ какъ, во-1-хъ, въ задачѣ не указано, въ какомъ направленіи двигался поѣздъ: отъ Петербурга ли къ Москвѣ, или отъ Москвы къ Петербургу; и, во-2-хъ, мы не знаемъ, идетъ ли рѣчь, о моментѣ времени, который былъ позже полудня на t часовъ, или же о томъ моментѣ, который былъ раньше полудня на t часовъ. Такимъ образомъ, задача наша, чтобы быть вполне опредѣленной, должна распасться на слѣдующія 4 отдѣльныя задачи.

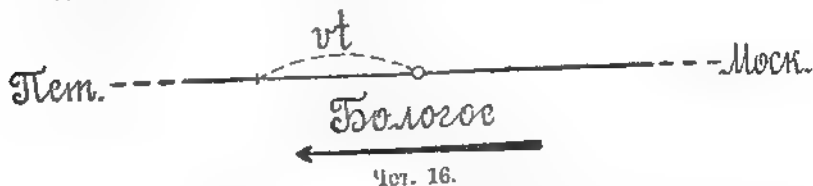
1) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся отъ Петербурга къ Москвѣ со скоростью v верстъ въ часъ, проходилъ черезъ станцію Бологое. Опредѣлить мѣстоахожденіе этого поѣзда t часовъ послѣ полудня.



Черт. 16.

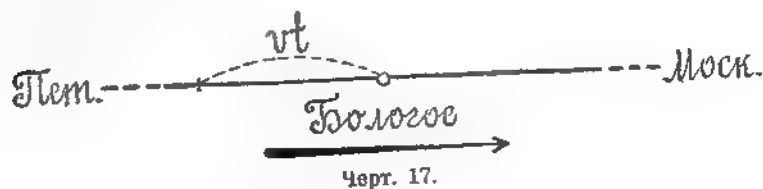
Тогда отвѣтъ будетъ таковъ: въ указанный моментъ времени поѣздъ находился на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направленію къ Москвѣ (черт. 16).

2) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся отъ Москвы къ Петербургу со скоростью v верстъ въ часъ, прослѣдовала черезъ станцію Бологое. Определить мѣстонахождение этого поѣзда t часовъ послѣ полудня.



Отвѣтъ будетъ: на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направлению къ Петербургу (черт. 16).

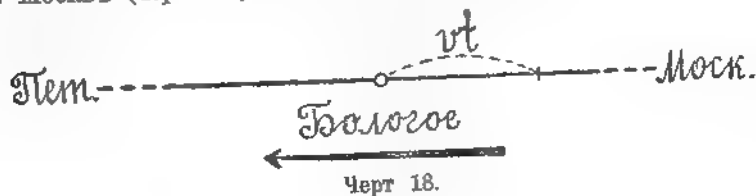
3) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся отъ Петербурга къ Москвѣ со скоростью v верстъ въ часъ, проходила черезъ станцію Бологое. Определить мѣстонахождение этого поѣзда t часовъ до полудня.



Отвѣтъ: на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направлению къ Петербургу (черт. 17).

4) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся отъ Москвы къ Петербургу со скоростью v верстъ въ часъ, проходила черезъ станцію Бологое. Определить мѣстонахождение этого поѣзда t часовъ до полудня.

Отвѣтъ: на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направлению къ Москвѣ (черт. 18).



Введеніе въ алгебру отрицательныхъ чиселъ и правилъ дѣйствій надъ ними позволяетъ эти 4 отдѣльныя задачи выразить одною общею задачею и дать для нея одно общесрѣшеніе. Для этого предварительно условимся, во-1-хъ, какое изъ двухъ возможныхъ направленій скорости поѣзда (отъ Петербурга къ Москвѣ, или наоборотъ) считать за положительное и какое за отрицательное; и, во-2-хъ, какой промежутокъ времени, слѣдующій за полуднемъ или предшествующій ему, считать положительнымъ и какой отрицательнымъ. Условимся, напр., скорость поѣзда при движеніи его отъ Петербурга къ Москвѣ считать положительной, а скорость при обратномъ движеніи, отъ Москвы къ Петербургу—считать отрицательной; такимъ образомъ мы будемъ, напр., говорить: поѣздъ двигался со скоростью $+40$ верстъ въ часъ, или поѣздъ двигался со скоростью -35 верстъ въ часъ, разумѣя при этомъ, что въ первомъ случаѣ поѣздъ шель отъ Петербурга къ Москвѣ со скоростью 40 верстъ въ часъ, а во второмъ случаѣ онъ шель отъ Москвы къ Петербургу со скоростью 35 верстъ въ часъ. Далѣе условимся считать положительными всѣ тѣ промежутки времени, которые слѣдуютъ за полуднемъ, и отрицательными тѣ, которые предшествуютъ полудню; напр., мы будемъ говорить, что моментъ времени, въ который требуется опредѣлить мѣстонахождение поѣзда, отстоитъ отъ полудня на $+4$ часа, или моментъ этотъ отстоитъ отъ полудня на -3 часа, разумѣя при этомъ, что въ первомъ случаѣ моментъ времени надо считать *позднѣе* полудня на 4 часа, а во второмъ случаѣ его надо брать *раньше* полудня на 3 часа.

Допустимъ теперь, что въ задачѣ нашей буквы t и v будутъ означать не числа ариометическія, какъ мы прежде предполагали, а числа алгебраическія; напр., t можетъ означать въ задачѣ и $+4$, и -3 ; v можетъ означать и $+40$, и -35 , и другія алгебраическія числа. Тогда мы можемъ сказать, что задача наша включаетъ въ себѣ всѣ 4 частные случая, указанные выше, и точнымъ отвѣтомъ на нее будетъ слѣдующій общій отвѣтъ:

въ указанный моментъ времени поѣздъ находился на разстояніи отъ Бологова, равномъ x верстъ,

если только подъ произведеніемъ vt алгебраическихъ чиселъ v и t условимся разумѣть произведеніе ихъ абсолютныхъ величинъ, взятое со знакомъ $+$ въ томъ случаѣ, когда оба сомножителя числа положительныя или оба—числа отрицательныя, и со знакомъ $-$ въ томъ случаѣ, когда одинъ сомножитель число положительное, а другой—отрицательное. При этомъ условіи нашъ общій отвѣтъ (указанный выше) будетъ годенъ для всѣхъ частныхъ случаевъ. Дѣйствительно:

1) Пусть буквы v и t означаютъ положительныя числа, напр., $v=+40$ и $t=+3$. Эти заданія означаютъ, что поѣздъ шель по направленію отъ Петербурга къ Москвѣ со скоростью 40 верстъ въ часъ, и что требуется опредѣлить мѣстонахожденіе поѣзда въ моментъ времени, бывшій 3 часа послѣ полудня. Въ этомъ случаѣ искомое мѣсто лежитъ, какъ мы видѣли, на 120 верстъ отъ Вологова по направленію къ Москвѣ (см. черт. 15). Значить, искомое разстояніе равно $+120$ вер. Но, согласно нашему условію, и произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(+40)(+3)=+120$. Слѣд., можно сказать, что искомое разстояніе равно произведенію vt верстъ.

2) Пусть v отрицательное число, напр., -40 , а t положительное число, напр. $+3$. Эти заданія надо понимать въ томъ смыслѣ, что поѣздъ шель отъ Москвы къ Петербургу, и надо опредѣлить его мѣсто въ моментъ, бывшій 3 часа послѣ полудня. Мы видѣли, что тогда оно лежитъ на 120 верстъ отъ Вологова, по направленію къ Петербургу (см. черт. 16), т.е. искомое разстояніе равно -120 вер. Но и произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(-40)(+3)=-120$; значить, опять также можно сказать, что искомое разстояніе равно vt вер.

3) Пусть v положительное число, напр. $+40$, а t отрицательное число, напр. -3 . Эти заданія означаютъ, что поѣздъ шель отъ Петербурга къ Москвѣ, и требуется опредѣлить его мѣсто въ моментъ, бывшій 3 часа до полудня. Это мѣсто находится на 120 верстъ отъ Вологова по направленію къ Петербургу (см. черт. 17); значить, искомое разстояніе равно -120 вер. Но и

произведеііе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(+40)(-3)=-120$; слѣдовательно, можно сказать, что искомое разстояніе равно vt верстѣ.

4) Пусть, наконецъ, и v , и t означаютъ отрицательныя числа, напр., $v=-40$, $t=-3$. Эти заданія означаютъ, что поѣздъ шелъ по направленію отъ Москвы къ Петербургу, и что моментъ времени, въ который требуется опредѣлить мѣстоахожденіе поѣзда, былъ за 3 часа до полудня. Въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли, искомое мѣсто лежитъ на разстояніи 120 верстѣ отъ Бологова, по направленію къ Москвѣ (см. черт. 18), т.-е. искомое разстояніе равно $+120$ вер. Но и произведеііе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(-40)(-3)=+120$; значить, и теперь можно сказать, что искомое разстояніе равно vt верстѣ.

30. Опредѣленіе произведенія двухъ алгебраическихъ чиселъ. Произведеніемъ двухъ алгебраическихъ чиселъ наз. произведеніе ихъ абсолютныхъ величинъ, взятое со знакомъ $+$ въ томъ случаѣ, когда перемножаемыя числа имѣютъ одинаковые знаки, и со знакомъ $-$ въ томъ случаѣ, когда они противоположныхъ знаковъ.

Часть этого опредѣленія, касающаяся знаковъ, носить названіе **правила знаковъ**; его обыкновенно выражаютъ такъ. при умноженіи плюсъ на плюсъ и минусъ на минусъ даютъ плюсъ, а плюсъ на минусъ и минусъ на плюсъ даютъ минусъ; или короче: при умноженіи двухъ чиселъ одинаковые знаки даютъ $+$, разные знаки даютъ $-$.

Примѣры. $(+10)(+2)=+20$; вообще: $(+a)(+b)=+ab$;
 $(-10)(+2)=-20$; $(-a)(+b)=-ab$;
 $(+10)(-2)=-20$; $(+a)(-b)=-ab$;
 $(-10)(-2)=+20$. $(-a)(-b)=+ab$.

31. Замѣчаніе. Изъ даннаго опредѣленія видно, что отъ умноженія на положительное число знакъ множимаго неизмѣняется, а отъ умноженія на отрицательное число онъ перемѣняется на противоположный.

32. Обобщеніе формулъ умноженія. Формулы: $(+a)(+b)=+ab$, $(-a)(+b)=-ab$, $(+a)(-b)=-ab$,

$(-a)(-b)=+ab$, которыми выражается определение произведения алгебраических чиселъ, остаются вѣрными и тогда, когда подъ буквами a и b будемъ подразумѣвать числа алгебраическія. Въ этомъ легко убѣдиться повѣркою. Возьмемъ, напр., послѣднее равенство: $(-a)(-b)=+ab$ и посмотримъ, во что оно обратится, если въ него на мѣсто a подставимъ число -5 и на мѣсто b число -2 :

$$[-(-5)][-(-2)]=+(-5)(-2).$$

Такъ какъ выраженія: $-(-5)$ и $-(-2)$ равносильны соответственно такимъ: $+5$ и $+2$, то лѣвая часть равенства представляетъ собою произведение $(+5)(+2)$, что равно $+10$. Въ правой части равенства произведение $(-5)(-2)$ равно $+10$, а выраженіе $+(+10)$ равносильно $+10$. Такимъ образомъ, обѣ части равенства даютъ одно и то же число $+10$, и, значитъ, оно вѣрно. Подобнымъ образомъ можемъ провѣрить и всѣ другія равенства.

33. Случай, когда какой-нибудь сомножитель равенъ нулю. Опредѣлите произведенія алгебраическихъ чиселъ примѣняется и въ томъ случаѣ, когда какой-нибудь сомножитель равенъ нулю; надо только помнить, что абсолютная величина числа 0 есть 0 и что выраженія $+0$, -0 и просто 0 равносильны. Такимъ образомъ, $(+2) \cdot 0 = +(2 \cdot 0) = 0$; $(-2) \cdot 0 = -(2 \cdot 0) = -0 = 0$; $0 \cdot (+2) = +(0 \cdot 2) = +0 = 0$ и пр.

Мы видимъ такимъ образомъ, что когда какой-нибудь сомножитель равенъ 0, то и произведеніе равно нулю. Если еще примемъ во вниманіе, что когда ни одинъ изъ сомножителей не равенъ 0, то произведеніе не можетъ равняться 0 (такъ какъ въ этомъ случаѣ абсолютная величина произведенія не равна 0), то мы можемъ высказать такое свойство произведенія, которое неоднократно попадется намъ впоследствии:

для того, чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы какой-нибудь сомножитель равнялся нулю.

34. Опредѣленіе произведенія 3-хъ и болѣе сомножителей. Произведеніемъ 3-хъ и болѣе данныхъ алгебраическихъ чиселъ, взятыхъ въ опредѣленномъ порядкѣ, называется (какъ

ивъ ариаметикѣ) число, которое получится, если сначала умножимъ первое данное число на второе, потомъ полученное произведение умножимъ на третье данное число и т. д. Напримѣръ, произведение слѣдующихъ 6 чиселъ:

$$(+2)(-1)(+3)(-10)(-4)(-1)$$

получится, если мы произведемъ умноженія въ такомъ порядкѣ:

$$\begin{aligned} (+2)(-1) &= -2; & (-2)(+3) &= -6; & (-6)(-10) &= +60; \\ (+60)(-4) &= -240; & (-240)(-1) &= +240. \end{aligned}$$

35. Знакъ произведенія. Если перемножаются только одни положительныя числа, то, конечно, знакъ окончательнаго произведенія долженъ быть $+$. Но когда всѣ или нѣкоторые сомножители числа отрицательныя (при чемъ ни одинъ изъ остальныхъ сомножителей не есть 0), то произведение окажется со знакомъ $+$ въ томъ случаѣ, когда число отрицательныхъ сомножителей четное, и со знакомъ $-$ въ томъ случаѣ, когда это число нечетное. Такъ, произведенія:

$$(+2)(-1)(+3)(-10) = +60$$

и
$$(+2)(-1)(+3)(-10)(-4)(-1) = +240$$

оказались оба со знакомъ $+$ вслѣдствіе того, что въ нихъ число отрицательныхъ сомножителей четное (въ первомъ 2, во второмъ 4); тогда какъ произведенія:

$$\begin{aligned} (+2)(-1) &= -2, & (+2)(-1)(+3) &= -6, \\ (+2)(-1)(+3)(-10)(-4) &= -240 \end{aligned}$$

оказались со знакомъ $-$ вслѣдствіе того, что въ каждомъ изъ нихъ отрицательные сомножители входятъ въ нечетномъ числѣ.

Чтобы убѣдиться въ общности этого свойства, примемъ во вниманіе, что, каково бы ни было алгебраическое число a , произведение $(+1) a$ всегда равно a ; напр., $(+1) (+3) = +3$ и $(+1) (-3) = -3$. Замѣтивъ это, возьмемъ произведеніе:

$$abcd... \text{ или, что все равно: } (+1) abcd...,$$

гдѣ буквы $a, b, c, d...$ означаютъ какія-нибудь алгебраическія числа, положительныя или отрицательныя. Тогда отъ умноженія $+1$ послѣдовательно на $a, b, c...$ знакъ $+$ переимѣнится столько разъ, сколько встрѣтится отрицательныхъ множителей; значитъ, если этихъ множителей четное число, то знакъ $+$ переимѣнится четное число разъ, а если ихъ нечетное число,

то и знак + переѣнится нечетное число разъ. По знак +, измѣнившись четное число разъ, остается +, а измѣнившись нечетное число разъ, оъ дѣляется—. Отсюда выводится указанное выше свойство.

36. Свойства произведенія. Эти свойства тѣ же, какія принадлежатъ и произведенію ариеметическихъ чиселъ (§ 8), а именно:

1°. **Переѣстительное свойство:** произведеніе не измѣняется отъ переѣны порядка сомножителей.

Для двухъ сомножителей это слѣдуетъ непосредственно изъ опредѣленія произведенія алгебраическихъ чиселъ и переѣстительнаго свойства произведенія ариеметическихъ чиселъ. Такъ, принявъ во вниманіе, что если a и b означаютъ какія-нибудь ариеметическія числа, то $ab=ba$, мы будемъ имѣть согласно опредѣленію умноженія алгебраическихъ чиселъ;

$$\begin{aligned} (+a)(+b) &= +ab & \text{и} & & (+b)(+a) &= +ba = +ab \\ (-a)(+b) &= -ab & \text{и} & & (+b)(-a) &= -ba = -ab \\ (+a)(-b) &= -ab & \text{и} & & (-b)(+a) &= -ba = -ab \\ (-a)(-b) &= +ab & \text{и} & & (-b)(-a) &= +ba = +ab \end{aligned}$$

Точно такъ же: $(\pm a) \cdot 0 = 0$ и $0 \cdot (\pm a) = 0$.

Возьмемъ теперь произведеніе, состоящее болѣе, чѣмъ изъ 2-хъ сомножителей, напр., такое:

$$(-a)(-b)(-c)(+d) \dots$$

Изъ опредѣленія произведенія алгебраическихъ чиселъ слѣдуетъ, что абсолютная величина даннаго произведенія равна $abcd$; знакъ же окажется + или —, смотря по тому, въ четномъ числѣ, или въ нечетномъ, входятъ въ произведеніе отрицательные сомножители. Если мы переставимъ сомножителей какъ-нибудь, напр., такъ:

$$(-c)(+d)(-b)(+a) \dots,$$

то получимъ новое произведеніе, у котораго абсолютная величина равна $cdba \dots$ и знакъ будетъ + или —, смотря по тому, въ четномъ числѣ, или въ нечетномъ, входятъ въ это новое произведеніе отрицательные сомножители. Такъ какъ $cdba \dots = abcd \dots$ (по переѣстительному свойству произведенія ариеметическихъ чиселъ), и число отрицательныхъ сомножителей отъ переѣщенія

ихъ, очевидно, не могло измѣниться, то у обоихъ произведеній абсолютная величина будетъ одна и та же и знаки одинаковы; слѣдовательно:

$$(+a)(-b)(-c)(+d)\dots = (-c)(+d)(-b)(+a)\dots$$

Равенство это остается въ силѣ и тогда, когда въ числѣ сомножителей есть равные нулю, такъ какъ въ этомъ случаѣ всѣ произведенія окажутся нулями.

2°. **Сочетательное свойство:** произведеніе не измѣнится, если какихъ-либо сомножителей мы замѣнимъ ихъ произведеніемъ.

Напримѣръ, вычисляя произведеніе $(-5)(+3)(-2)$, мы можемъ сомножителей $(+3)$ и (-2) замѣнить ихъ произведеніемъ -6 .

Дѣйствительно, примѣняя перемѣстительное свойство, мы можемъ написать:

$$\begin{aligned} (-5)(+3)(-2) &= (+3)(-2)(-5) = (-6)(-5) = \\ &= (-5)(-6) = (-5)[(+3)(-2)]. \end{aligned}$$

Въ примѣненіи къ произведенію трехъ алгебраическихъ чиселъ abc мы можемъ сочетательное свойство выразить такою формулой:

$$abc = a(bc).$$

Читая это равенство справа налѣво, мы можемъ то же свойство высказать другими словами: чтобы умножить какое-нибудь число на произведеніе, достаточно умножить это число на перваго сомножителя, полученное произведеніе умножить на втораго сомножителя и т. д.

Слѣдствіе. Чтобы вычислить произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, можно разбить ихъ на какія угодно группы, произвести умноженіе въ каждой группѣ отдѣльно и полученные произведенія перемножить.

3°. **Распределительное свойство:** чтобы умножить алгебраическую сумму на алгебраическое число, достаточно умножить на это число каждое слагаемое отдѣльно и полученные произведенія сложить.

Ограничимся повѣркою этого свойства на частныхъ примѣрахъ.

Примѣръ 1. $[(-2)+9+(-3)] \cdot (+7)$.

Если вычислимъ сначала сумму, а потомъ сдѣлаемъ умноженіе, то найдемъ:

$$(+4)(+7)=+28.$$

Умножимъ теперь каждое слагаемое отдѣльно на $+7$ и сложимъ результаты:

$$\begin{aligned} (-2)(+7) &= -14; & (+9)(+7) &= +63; & (-3)(+7) &= -21; \\ & & -14+63-21 &= +63-35 & &= +28. \end{aligned}$$

Мы получили то же самое число $+28$.

Примѣръ 2. $[8+(-2)+(-3)](-10)$.

Вычисливъ сумму и умноживъ ее на -10 , находимъ $(+3)(-10)=-30$. Произведя умноженіе каждого слагаемаго отдѣльно, получимъ то же самое число -30 :

$$\begin{aligned} 8(-10) &= -80; & (-2)(-10) &= +20; & (-3)(-10) &= +30; \\ & & -80+20+30 &= -30. \end{aligned}$$

37. Доказательство распредѣлительнаго свойства. Требуется доказать, что каковы бы ни были алгебраическія числа a, b, c и m всегда:

$$(a+b+c)m=am+bm+cm.$$

Разсмотримъ особо слѣдующіе 3 случая:

1^о, m есть положительное цѣлое число, напр., $m=+3$ или проше: $m=3$. Умножить какое-нибудь число на 3 значитъ повторить это число слагаемымъ 3 раза; поэтому:

$$(a+b+c) \cdot 3 = (a+b+c) + (a+b+c) + (a+b+c).$$

Чтобы прибавить сумму, достаточно прибавить каждое слагаемое одно за другимъ; поэтому написанное равенство можно переписать такъ:

$$(a+b+c) \cdot 3 = a+b+c+a+b+c+a+b+c.$$

Въ правой части этого равенства сгруппируемъ слагаемыя такъ:

$$(a+b+c) \cdot 3 = (a+a+a) + (b+b+b) + (c+c+c) = a \cdot 3 + b \cdot 3 + c \cdot 3.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что распредѣлительное свойство въ этомъ случаѣ дѣйствительно имѣетъ мѣсто.

2^о, m есть положительная дробь, напр., $m=+\frac{7}{5}$ или проше: $m=\frac{7}{5}$. Умножить какое-нибудь число на $\frac{7}{5}$ значитъ найти $\frac{7}{5}$ этого числа, или чего достаточно найти сначала $\frac{1}{5}$ часть числа а затѣмъ эту часть по-

множить на 7. По $\frac{1}{5}$ отъ $a+b+c$ есть $\frac{a}{5} + \frac{b}{5} + \frac{c}{5}$, такъ какъ, умноживъ ис-
слѣдную сумму на цѣлое число 5 (согласно распределительному свойству
доказанному для m цѣлаго), мы получимъ $a+b+c$:

$$\left(\frac{a}{5} + \frac{b}{5} + \frac{c}{5}\right) \cdot 5 = \frac{a}{5} \cdot 5 + \frac{b}{5} \cdot 5 + \frac{c}{5} \cdot 5 = a+b+c.$$

Если же $\frac{1}{5}$ отъ $a+b+c$ есть $\frac{a}{5} + \frac{b}{5} + \frac{c}{5}$, то $\frac{7}{5}$ отъ $a+b+c$ равны
 $\left(\frac{a}{5} + \frac{b}{5} + \frac{c}{5}\right) \cdot 7$, что, согласно доказанному въ 1-мъ случаѣ, составляетъ
 $\frac{a}{5} \cdot 7 + \frac{b}{5} \cdot 7 + \frac{c}{5} \cdot 7$. Выраженіе $\frac{a}{5} \cdot 7$ представляетъ собою пятую часть a
повторенную слагаемымъ 7 разъ; значить, оно составляетъ $\frac{7}{5}$ числа a и
потому его можно замѣнить произведеніемъ $a \cdot \frac{7}{5}$. То же самое можно ска-
зать о выраженіяхъ $\frac{b}{5} \cdot 7$ и $\frac{c}{5} \cdot 7$. Поэтому мы можемъ написать:

$$\left(a+b+c\right) \frac{7}{5} = \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{5} + \frac{c}{5}\right) \cdot 7 = a \frac{7}{5} + b \frac{7}{5} + c \frac{7}{5}$$

Такимъ образомъ распределительное свойство и для этого случая
доказано.

3°, m есть отрицательное число, напр., $m = -7$. Умножить
какое-нибудь число на -7 значить умножить это число на 7 и результатъ
взять съ противоположнымъ знакомъ. Умноживъ $a+b+c$ на 7, получимъ,
по доказанному $a \cdot 7 + b \cdot 7 + c \cdot 7$. Чтобы эту сумму взять съ противо-
положнымъ знакомъ, достаточно переменить знакъ у каждаго слагаемаго
суммы (§ 20, 3°). Но $-(a \cdot 7) = a \cdot (-7)$, $-(b \cdot 7) = b \cdot (-7)$ и $-(c \cdot 7) = c \cdot (-7)$;
потому:

$$(a+b+c) \cdot (-7) = a \cdot (-7) + b \cdot (-7) + c \cdot (-7).$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что каково бы ни было алгебраическое
число m , всегда

$$(a+b+c)m = am + bm + cm$$

Дѣленіе алгебраическихъ чиселъ.

38. Опредѣленіе. Дѣленіе алгебраическихъ чиселъ опре-
дѣляется такъ же, какъ и дѣленіе арифметическихъ чиселъ,
а именно: дѣленіе есть дѣйствіе (обратное умноженію), по-
средствомъ котораго по данному произведенію двухъ сомно-
жителей и одному изъ этихъ сомножителей отыскивается дру-
гой. Такъ, раздѣлить $+10$ на -2 значить найти такое
число x , чтобы произведеніе $(-2)x$ или $-$ все равно $-$ про-
изведеніе $x(-2)$ равнялось $+10$; такое число есть, и притомъ

только одно, именно -5 , такъ какъ произведеше числа -5 на -2 равно $+10$, а произведеше какого-нибудь числа, отличнаго отъ -5 , на -2 не можетъ составить $+10$.

39. Случай, когда какое-нибудь данное число равно нулю. Такихъ случаевъ можетъ быть три, а именно.

1) Если дѣлимое равно 0, а дѣлитель не равенъ 0, то частное должно быть 0.

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить 0 на какое-нибудь число a значитъ пайти такое число, которое, умноженное на a , даетъ въ произведеніи 0. Такое число есть, и только одно, именно 0; значить, $0 : a = 0$.

2) Если дѣлимое равно 0 и дѣлитель равенъ 0, то частное можетъ равняться любому числу,

потому что всякое число, умноженное на 0, даетъ въ произведеніи 0; слѣд., частное $0 : 0$ равно всякому числу.

3) Если дѣлимое не равно 0, а дѣлитель равенъ нулю, то частное не существуетъ,

потому что, какое бы число мы не предположили въ частномъ, оно, умноженное на 0, даетъ въ произведеніи 0, а не какое-либо другое число; значить, частное $a : 0$ невозможно, если a не равно 0.

Такимъ образомъ, если дѣлитель равенъ 0, то дѣленіе или невозможно (если дѣлимое не равно 0), или есть дѣйствіе неопредѣленное (если дѣлимое равно 0); поэтому случаи этотъ мы вообще будемъ исключать.

40. Правило дѣленія. Чтобы раздѣлить одно алгебраическое число на другое, дѣлятъ ихъ абсолютныя величины и результатъ берутъ со знакомъ $+$, когда дѣлимое и дѣлитель имѣютъ одинаковые знаки, и со знакомъ $-$, когда у дѣяимаго и дѣлителя знаки разные.

Такъ: $(+10) : (+2) = +5$, потому что $(+2)(+5) = +10$.
 $(-10) : (-2) = +5$, » » $(-2)(+5) = -10$
 $(-10) : (+2) = -5$, » » $(+2)(-5) = -10$.
 $(+10) : (-2) = -5$, » » $(-2)(-5) = +10$.

Такимъ образомъ, правило знаковъ при дѣленіи остается то же самое, что и при умноженіи.

41. Другое правило дѣленія. Можно указать болѣе простое правило дѣленія, если предварительно условиться въ значеніи термина «обратное» число.

Числомъ, обратнымъ данному алгебраическому числу a , называется такое алгебраическое число, которое получается отъ дѣленія $+1$ на a ; другими словами, такое число, которое, умноженное на a , даетъ въ произведеніи $+1$. Такимъ образомъ:

числу $+3$	соотвѣтствуетъ	обратное число	$(+1) : (+3) = +\frac{1}{3}$.
» -3	»	»	$(+1) : (-3) = -\frac{1}{3}$.
» $+\frac{1}{3}$	»	»	$(+1) : (+\frac{1}{3}) = +3$.
» $-\frac{1}{3}$	»	»	$(+1) : (-\frac{1}{3}) = -3$.

Такъ какъ дѣленіе на нуль невозможно, то число 0 не имѣетъ себѣ обратнаго числа; всякому другому алгебраическому числу соотвѣтствуетъ свое обратное число (и только одно).

Теперь мы можемъ высказать другое правило дѣленія такъ: чтобы раздѣлить одно число на другое, достаточно дѣлимое умножить на число, обратное дѣлителю. Въ этомъ легко убѣдиться повѣркою; напр., $(-10) : (+5) = -2$ и $(-10) \cdot (+\frac{1}{5}) = -\frac{10}{5} = -2$, и т. п.

42. Нѣкоторыя свойства дѣленія. 1°. Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на произведеніе, достаточно раздѣлить это число на перваго сомножителя, полученное частное раздѣлить на втораго сомножителя, это частное — на третьяго сомножителя и т. д.

$$\text{Такъ: } (-40) : [(+5)(-2)] = [(-40) : (+5)] : (-2) = (-8) : (-2) = +4.$$

$$\text{Вообще: } a : (bc) = (a : b) : c$$

(здѣсь буквы: a , b и c означаютъ какія угодно алгебраическія числа, лишь бы только числа b и c не были равны 0).

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этого равенства, умножимъ предполагаемое частное на дѣлителя bc ; если послѣ умноженія получимъ дѣлимое a , то это будетъ значить, что предполагаемое частное вѣрно. Въмѣсто того, чтобы умножить на bc , мы можемъ умножить на cb . Чтобы умножить какое-нибудь число

на cb , можно умножить это число на c и затѣмъ результатъ умножить на b . Умноживъ предполагаемое частное $(a : b) : c$ на c , получимъ (по опредѣленію дѣленія) число $a : b$; умноживъ это число на b , получимъ дѣлимое a . Слѣд., предполагаемое частное вѣрно.

2°. Чтобы раздѣлить произведеніе на какое-нибудь число, достаточно раздѣлить на это число одного изъ сомножителей

$$\text{Такъ: } [(-20)(+15)] : (-5) = [(-20) : (-5)](+15) = \\ = (+4)(+15) = +60,$$

$$\text{или } [(-20)(+15)] : (-5) = (-20)[(+15) : (-5)] = \\ = (-20)(-3) = +60.$$

$$\text{Вообще: } (ab) : c = (a : c)b,$$

$$\text{или } (ab) : c = a(b : c)$$

(здѣсь буквы a , b и c означаютъ какія угодно алгебраическія числа, лишь бы только c не было равно 0).

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этихъ равенствъ, умножимъ каждое изъ этихъ предполагаемыхъ частныхъ на дѣлителя c ; если послѣ умноженія получимъ дѣлимое ab , то заключимъ, что равенства вѣрны. Оба предполагаемыхъ частныхъ представляютъ собой произведеніе. Чтобы умножить произведеніе, достаточно умножить одного изъ сомножителей. Умноживъ на c въ первомъ предполагаемомъ частномъ сомножителя $(a : c)$, а во второмъ предполагаемомъ частномъ сомножителя $(b : c)$, мы получимъ въ окончательномъ результатѣ дѣлимое ab ; значитъ, оба равенства вѣрны.

ГЛАВА IV.

Раздѣленіе алгебраическихъ выраженій.

43. Предварительныя замѣчанія. 1°. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ предполагать (если не сдѣлаемъ особыхъ оговорокъ), что буквы, входящія въ алгебраическія выраженія, означаютъ числа алгебраическія, какъ положительныя, такъ и отрицательныя; буквы могутъ такж

означать и число 0, кроме случая, когда онъ входитъ въ выраженіе въ качествѣ дѣлителя: дѣленіе на 0 мы вообще исключаемъ (§ 39).

2⁰. Если случатся, что въ какомъ-либо произведеніи есть нѣсколько сомножителей, выраженныхъ цифрами, или нѣкоторые буквенные сомножители повторяются, что такіа произведенія можно упростить, пользуясь сочетательнымъ свойствомъ произведенія (§ 36, 2⁰). Возьмемъ, напр., произведеніе: $abaca(-2)cb$. Сгруппируемъ его сомножителей такъ: къ первой группѣ отнесемъ всѣхъ сомножителей, выраженныхъ цифрами, ко второй группѣ—всѣхъ сомножителей, обозначенныхъ буквою a , къ третьей—всѣхъ сомножителей, обозначенныхъ буквою b , и т. д. Тогда мы получимъ выраженіе: $[3(-2)](aaa)(bb)c$, которое можно написать проще такъ: $-6a^3b^2c$.

Въ дальнѣйшемъ мы всегда будемъ предполагать, что произведенія приведены къ такому упрощенному виду.

44. Раздѣленіе алгебраическихъ выраженій.

Алгебраическое выраженіе наз. рациональнымъ относительно какой-нибудь буквы, входящей въ это выраженіе, если буква эта не стоитъ подъ знакомъ извлеченія корня; въ противномъ случаѣ выраженіе наз. иррациональнымъ.

Напр., выраженіе $3ab+2\sqrt{x}$ есть рациональное относительно a и b и иррациональное относительно x .

Въ началѣ курса алгебры мы будемъ говорить только о такихъ алгебраическихъ выраженіяхъ, которыя рациональны относительно всѣхъ входящихъ въ нихъ буквъ (такія выраженія наз. просто рациональными, безъ добавленія: «относительно всѣхъ буквъ»).

Алгебраическое выраженіе наз. цѣлымъ относительно какой-нибудь буквы, если эта буква не входитъ въ него дѣлителемъ или частью дѣлителя; въ противномъ случаѣ выраженіе наз. дробнымъ.

Напр., выраженіе $x^2 + \frac{2x}{a-1}$ есть цѣлое относительно x , но дробное относительно a .

Въ началѣ курса алгебры мы будемъ говорить большѣю частью только о такихъ алгебраическихъ выраженіяхъ, которыя

можно назвать цѣлыми относительно всѣхъ буквъ, входящихъ въ нихъ (ихъ просто называютъ цѣлыми, безъ добавленія: «относительно всѣхъ буквъ»).

Алгебраическое выраженіе, представляющее собою произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, наз. *одночленомъ*.

Напр., выраженія: $-6a^3b^2c$, $+0,5xy^3$, $2m^3$ и т. п. суть одночлены.

Одночленомъ принято называть также и всякое отдѣльно взятое число, выраженное буквою или цифрами, напр.: a , x , -3 .

Число всѣхъ буквенныхъ сомножителей, составляющихъ одночленъ, наз. его *измѣреніемъ*; такъ, одночленъ $3a^2bc$, который представляетъ собою произведеніе $3aabc$, есть одночленъ четвертаго измѣренія, одночленъ $10x^3$ —третьяго измѣренія.

45. Коэффициентъ. Выраженный цифрами сомножитель, стоящій впереди одночлена, наз. *коэффициентомъ* его. Такъ, въ одночленѣ $-6a^3b^2c$ число -6 есть коэффициентъ этого одночлена ¹⁾.

Цѣлый положительный коэффициентъ означаетъ, сколько разъ повторяется слагаемымъ то буквенное выраженіе, передъ которымъ онъ стоитъ. Напр., $3ab = (ab) \cdot 3 = ab + ab + ab$.

Дробный положительный коэффициентъ означаетъ, какая дробь берется отъ буквеннаго выраженія, къ которому онъ относится. Такъ, въ выраженіи $\frac{1}{2}x^2$ коэффициентъ означаетъ, что отъ x^2 берется $\frac{1}{2}$, потому что $\frac{1}{2}x^2 = x^2 \cdot \frac{1}{2}$, а умножить на $\frac{1}{2}$ значитъ взять $\frac{1}{2}$ отъ множимаго.

Отрицательный коэффициентъ означаетъ, что буквенное выраженіе, передъ которымъ онъ стоитъ, умножается на абсолютную величину этого коэффициента и результатъ берется съ противоположнымъ знакомъ.

Замѣчанія. 1°. При одночленѣ, не имѣющемъ коэффициента, можно подразумевать коэффициентъ $+1$ или -1 , смотря

¹⁾ Если нѣкоторымъ буквамъ одночлена придать особое значеніе, отличая ихъ отъ остальныхъ, то коэффициентъ можетъ быть и буквеннымъ. Напримѣръ, если въ одночленѣ $2Ax^3$ мы почему либо букву x придаемъ особое значеніе, то можно сказать, что $2A$ есть коэффициентъ при x^3 .

но знаку, который стоит (или подразумевается) передъ одночленомъ; такъ, $+ab$ (или ab) все равно, что $+1ab$, и $-ab$ все равно, что $(-1)ab$.

2°. Не должно думать, что одночленъ, псредь которымъ стоитъ знакъ—, представляетъ собою всегда отрицательное число, а одночленъ со знакомъ + есть всегда число положительное. Напримѣръ, при $a=-3$ и $b=+4$ одночленъ $+2ab$ даетъ отрицательное число: $(+2)(-3)(+4)=-24$, тогда какъ при тѣхъ же значеніяхъ буквъ одночленъ $-2ab$ даетъ число положительное: $(-2)(-3)(+4)=+24$.

46. Многочленъ. Алгебраическое выраженіе, составленное изъ нѣсколькихъ другихъ алгебраическихъ выраженій, соединенныхъ между собою знаками + или —, наз. **многочленомъ**. Таково, напр., выраженіе:

$$ab - a^2 + 3b^2 - bc + \frac{a-b}{2}.$$

Отдѣльныя выраженія, отъ соединенія которыхъ знаками + или — составилъ многочленъ, наз. **членами** его. Члены многочлена рассматриваются вмѣстѣ съ тѣми знаками, которые стоятъ передъ ними; напр., говорятъ: членъ $-a^2$, членъ $+3b^2$, и т. п. Передъ первымъ членомъ, если передъ нимъ не поставлено никакого знака (какъ въ приведенномъ примѣрѣ), можно подразумѣвать знакъ +.

Многочленъ, состоящій изъ двухъ членовъ, наз. **двучленомъ** (или **биномомъ**), изъ трехъ членовъ — **трехчленомъ** (или **триномомъ**) и т. д.

Многочленъ наз. **раціональнымъ**, если всѣ его члены раціональные, и **цѣлымъ**, если всѣ его члены цѣлые.

Цѣлый многочленъ наз. **однороднымъ**, если всѣ его члены суть одночлены, имѣющіе одинаковое измѣреніе. Напримѣръ, выраженіе $2ab^2 + a^3 - 5abc$ есть однородный многочленъ третьяго измѣренія.

47. Главнѣйшія свойства многочлена. Всякій многочленъ можно рассматривать, какъ

алгебраическую сумму его членовъ. На-
примѣръ, многочленъ:

$$2a^2 - ab + b^2 - \frac{1}{2}a + b$$

можно представить въ видѣ такой суммы:

$$(+2a^2) + (-ab) + (+b^2) + (-\frac{1}{2}a) + (+b),$$

такъ какъ при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквъ, выра-
женіе $+2a^2$ равносильно выраженію $2a^2$, выраженіе $+(-ab)$
равносильно выраженію $-ab$, и т. д. (§ 25).

Вслѣдствіе этого всѣ свойства суммы алгебраическихъ чиселъ
(§ 20), принадлежатъ также и многочлену. Эти свойства слѣ-
дующія:

1⁰. **Перемѣстительное свойство.** Численная величина
многочлена не зависитъ отъ порядка его
членовъ.

Положимъ, напр., мы находимъ численную величину много-
члена:

$$2a^2 - ab + b^2 - \frac{1}{2}a + b$$

при $a=4$ и $b=-3$. Для этого предварительно вычислимъ каждый
членъ отдѣльно:

$$2a^2 = 2(4 \cdot 4) = 32; \quad -ab = -4 \cdot (-3) = +12;$$

$$+b^2 = +(-3)(-3) = +9; \quad -\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2.$$

Теперь сложимъ всѣ полученные числа или въ томъ порядкѣ,
въ какомъ написаны члены многочлена:

$$32 + (+12) + (+9) + (-2) + (-3) = 32 + 12 + 9 - 2 - 3 = 48,$$

или въ какомъ-нибудь иномъ порядкѣ; всегда получимъ одно
и то же число 48.

2². **Сочетательное свойство.** Численная величина мно-
члена не измѣнится, если какіе-либо его
члены мы замѣнимъ ихъ алгебраическою
суммою.

Такъ, если въ данномъ выше многочленѣ мы замѣнимъ члены:
 $-ab$, $+b^2$ и $-\frac{1}{2}a$ ихъ алгебраическою суммою, т.е. возьмемъ
этотъ многочленъ въ такомъ видѣ:

$$2a^2 + (-ab + b^2 - \frac{1}{2}a) + b,$$

то при $a=4$ и $b=-3$ получимъ:

$$32 + (12 + 9 - 2) - 3 = 32 + 19 - 3 = 48,$$

т.е. получимъ то же самое число 48, какое получили прежде.

3°. Перемена знаковъ передъ членами многочлена. Если передъ каждымъ членомъ многочлена перемѣнимъ знакъ на противоположный, то получимъ новый многочленъ, численная величина котораго противоположна численной величинѣ перваго многочлена.

Напр., численная величина многочлена $2a^2 - ab + b^2 - \frac{1}{2}a + b$ при $a=4$ и $b=-3$ равна, какъ мы видѣли, 48; перемѣнивъ передъ всѣми членами знаки на противоположные, мы получимъ новый многочленъ:

$$-2a^2 + ab - b^2 + \frac{1}{2}a - b,$$

численная величина котораго при тѣхъ же значеніяхъ буквъ составляетъ не 48, а -48 :

$$-32 + (-12) - 9 + 2 - (-3) = -32 - 12 - 9 + 2 + 3 = -48.$$

Г Л А В А V.

Приведеніе подобныхъ членовъ.

48. Подобные члены. Члены многочлена, отличающіеся только коэффициентами, или же не отличающіеся ничѣмъ, наз. подобными. Напримѣръ, въ такомъ многочленѣ:

$$\underline{4a^2b^3} - \underline{3ab} + \underline{0,5a^2b^3} + \underline{3a^2c} + \underline{8ab}$$

первый членъ подобенъ третьему, потому что эти члены отличаются только коэффициентами (у перваго члена коэффициентъ $+4$, а у третьяго $+0,5$); второй членъ подобенъ пятому по той же причинѣ (коэффициентъ у втораго члена -3 , а у пятаго $+8$). Членъ $+3a^2c$ не имѣетъ себѣ подобныхъ, потому что онъ отличается отъ остальныхъ членовъ буквами и показателями при нихъ.

49. Приведеніе подобныхъ членовъ. Когда въ многочленѣ встрѣчаются подобные члены ¹⁾, то его можно

¹⁾ Чтобы легче было находить подобные члены, полезно члены многочлена всегда писать такъ, чтобы буквенные множители, входящіе въ составъ этихъ членовъ, были расположены въ алфавитномъ порядкѣ; напр., членъ $+3b^2a^3$ лучше писать такъ: $+3a^3b^2$

упростить, соединяя всё подобныя между собою члены въ одинъ. Такое соединеніе наз. приведениемъ подобныхъ членовъ.

Положимъ, напр., что въ какомъ-нибудь многочленѣ имѣются такіе подобныя члены: $+3a$, $-2a$, $-a$, $+5\frac{1}{2}a$. Будутъ ли эти члены слѣдовать одинъ за другимъ, или они будутъ раздѣляться какими-нибудь другими членами, мы всегда можемъ, основываясь на сочетательномъ свойствѣ многочлена, замѣнить всё эти члены ихъ алгебраическою суммою $+3a-2a-a+5\frac{1}{2}a$. По

$$+3a-2a-a+5\frac{1}{2}a=(+3-2-1+5\frac{1}{2})a,$$

такъ какъ, согласно распредѣлительному свойству умноженія (§ 36, 3°), чтобы умножить алгебраическую сумму $+3-2-1+5\frac{1}{2}$ на число a , достаточно умножить на a каждое слагаемое этой суммы отдѣльно. Сумма $+3-2-1+5\frac{1}{2}$ равна $+5\frac{1}{2}$, поэтому:

$$+3a-2a-a+5\frac{1}{2}a=+5\frac{1}{2}a.$$

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ слѣдующему выводу: нѣсколько подобныхъ членовъ многочлена можно замѣнить однимъ подобнымъ имъ членомъ, у котораго коэффициентъ равенъ алгебраической суммѣ коэффициентовъ этихъ членовъ.

Примѣры.

- 1) $a + 5mx - 2mx + 7mx - 8mx = a + (5 - 2 + 7 - 8)mx = a + 2mx;$
- 2) $\underline{4ax + b^2} - \underline{7ax} - \underline{3ax} + \underline{2ax} = (4 - 7 - 3 + 2)ax + b^2 = -4ax + b^2 = b^2 - 4ax.$
- 3) $\underline{4a^2b^2} - \underline{3ab} + \underline{0,5a^2b^3} + \underline{3a^2c} + \underline{8ab} = (4 + 0,5)a^2b^3 + (-3 + 8)ab + 3a^2c = 4,5a^2b^3 + 5ab + 3a^2c.$

ОТДѢЛЪ II.

Первыя четыре алгебраическія дѣйствія.

50. Общее замѣчаніе. Въ алгебраическія дѣйствія представляютъ собою преобразования одного алгебраическаго выраженія въ другое, тождественное первому. Такъ, сложеніе многочленовъ есть преобразование суммы многочленовъ въ одинъ многочленъ (или одночленъ), тождественный съ суммою данныхъ многочленовъ; умноженіе одночленовъ есть преобразование произведения одночленовъ въ новый одночленъ, тождественный съ этимъ произведеніемъ, и т. п.

ГЛАВА I.

Алгебраическое сложеніе и вычитаніе.

51. Сложеніе одночленовъ. Пусть требуется сложить одночлены: $3a$, $-5b$, $+0,2a$, $-7b$ и c . Ихъ сумма выразится такъ:

$$3a + (-5b) + (+0,2a) + (-7b) + c.$$

Но выраженія: $+(-5b)$, $+(+0,2a)$, $+(-7b)$, при всякихъ значеніяхъ буквъ a и b равносильны (§ 25) соответвенно выраженіямъ: $-5b$, $+0,2a$, $-7b$; поэтому сумму данныхъ одночленовъ можно переписать проще такъ:

$$\underline{3a} - \underline{5b} + \underline{0,2a} - \underline{7b} + c,$$

что, послѣ приведенія подобныхъ членовъ, даетъ: $3,2a - 12b + c$.

Правило. Чтобы сложить нѣсколько одночленовъ, пишутъ ихъ одинъ за другимъ съ ихъ знаками и дѣлаютъ приведеніе подобныхъ членовъ, если они окажутся.

52. Сложение многочленовъ. Пусть требуется къ какому-нибудь числу A приложить многочленъ $a-b+c-d$:

$$A+(a-b+c-d).$$

Многочленъ $a-b+c-d$ представляет собою сумму алгебраическихъ чиселъ: $a+(-b)+c+(-d)$; но чтобы прибавить сумму, достаточно прибавить каждое слагаемое одно за другимъ (§ 20, 2°); поэтому: $A+(a-b+c-d)=A+a+(-b)+c+(-d)$,

что, согласно формуламъ двойныхъ знаковъ (§ 25), можно переписать такъ: $A+(a-b+c-d)=A+a-b+c-d$.

Правило. Чтобы прибавить многочленъ къ какому-нибудь числу, приписываютъ къ этому числу всѣ члены многочлена одинъ за другимъ съ ихъ знаками (при чемъ предъ тѣмъ членомъ, при которомъ не стоитъ никакого знака, должно подразумѣвать знакъ $+$) и дѣлаютъ приведеніе подобныхъ членовъ, если они окажутся.

Примѣръ. $(3a^2-5ab+b^2)+(4ab-b^2+7a^2)$.

То, что мы обозначили сейчасъ буквой A , дано теперь въ видѣ многочлена $3a^2-5ab+b^2$. Примѣняя указанное правило сложения, найдемъ:

$$(3a^2-5ab+b^2)+(4ab-b^2+7a^2)=(3a^2-5ab+b^2)+4ab-b^2+7a^2.$$

Въ полученномъ результатѣ скобки могутъ быть отброшены, потому что отъ этого смыслъ выраженія не измѣнится:

$$3a^2-5ab+b^2+4ab-b^2+7a^2.$$

Приведа въ этомъ многочленѣ подобные члены, получимъ окончательно:

$$10a^2-ab.$$

Замѣчаніе. Если данные многочлены содержатъ подобныя члены, то полезно писать слагаемые одно подъ другимъ такъ, чтобы подобныя члены стояли подъ подобными; напр.,

$$+ \begin{array}{r} 3ax^2-1a^2x+2a^3 \\ -5ax^2+7a^2x-a^3 \\ \hline 1ax^2-2a^2x+0,3a^3 \\ \hline -11ax^2+4a^2x+1,3a^3 \end{array}$$

53. Вычитаніе одночленовъ. Пусть требуется изъ одночлена $10ax^2$ вычесть одночленъ $-3a^2x$:

$$10a^2x - (-3a^2x).$$

Для этого, согласно общему правилу вычитанія (§ 23), достаточно къ уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Число, противоположное одночлену $-3a^2x$, есть $3a^2x$; значить:

$$10a^2x - (-3a^2x) = 10a^2x + 3a^2x,$$

что, послѣ приведенія подобныхъ членовъ, даетъ $13a^2x$.

Правило. Чтобы вычесть одночленъ, приписываютъ къ уменьшаемому этотъ одночленъ съ противоположнымъ знакомъ и дѣлаютъ приведеніе подобныхъ членовъ, если они окажутся.

54. Вычитаніе многочленовъ. Пусть требуется изъ какого-нибудь числа A вычесть многочленъ $a-b+c$:

$$A - (a - b + c).$$

Для этого достаточно прибавить къ A число, противоположное числу $a-b+c$. Такое число есть (§ 47, 3⁰) $-a+b-c$. Слѣдов.,

$$A - (a - b + c) = A + (-a + b - c).$$

Примѣняя теперь правило сложенія многочленовъ, получимъ:

$$A - (a - b + c) = A - a + b - c.$$

Правило. Чтобы вычесть многочленъ, приписываютъ къ уменьшаемому все члены вычитаемого съ противоположными знаками и дѣлаютъ приведеніе подобныхъ членовъ, если они окажутся.

Замѣчаніе. Когда въ многочленахъ есть подобные члены, то вычитаемый многочленъ полезно писать подъ уменьшаемымъ, перемѣняя у вычитаемого многочлена знаки на обратные; напр., вычитаніе;

$$(7a^2 - 2ab + b^2) - (5a^2 - 2b^2 + 4ab)$$

всего удобнѣе располагать такъ:

$$\begin{array}{r} 7a^2 - 2ab + b^2 \\ + 5a^2 + 4ab - 2b^2 \\ \hline 2a^2 - 6ab + 3b^2. \end{array}$$

(въ вычитаемомъ многочленѣ верхніе знаки поставлены тѣ, какіе были даны, а внизу они переиѣнены на обратныя).

55. Раскрытие скобокъ, передъ которыми стоитъ знакъ + или —. Пусть требуется раскрыть скобки въ выраженіи:

$$2a + (a - 3b + c) - (2a - b + 2c).$$

Это надо понимать такъ, что требуется надъ многочленами, стоящими внутри скобокъ, произвести тѣ дѣйствія, которыя указываются знаками передъ скобками. Произведя эти дѣйствія по правиламъ сложения и вычитанія, получимъ:

$$2a + a - 3b + c - 2a + b - 2c = a - 2b - c.$$

Изъ правилъ сложения и вычитанія многочленовъ слѣдуетъ, что, раскрывая скобки, передъ которыми стоитъ +, мы не должны измѣнять знаковъ внутри скобокъ, а раскрывая скобки, передъ которыми стоитъ знакъ —, мы должны передъ всѣми членами, стоящими внутри скобокъ, измѣнить знаки на противоположныя.

Пусть еще требуется раскрыть скобки въ выраженіи:

$$10p - [3p + (5p - 10) - 4].$$

Для этого раскроемъ сначала внутреннія скобки, а затѣмъ внѣшнія:

$$10p - [3p + 5p - 10 - 4] = 10p - 3p - 5p + 10 + 4 = 2p + 14.$$

Можно поступать и въ обратномъ порядкѣ, т.-е. сначала раскрыть внѣшнія скобки, а потомъ внутреннія. Раскрывая внѣшнія скобки, мы должны приписать многочленъ, стоящій во внутреннихъ скобкахъ, за одночленъ и поэтому не должны измѣнять знаковъ внутри этихъ скобокъ:

$$\begin{aligned} 10p - [3p + (5p - 10) - 4] &= 10p - 3p - (5p - 10) + 4 = \\ &= 10p - 3p - 5p + 10 + 4 = 2p + 14. \end{aligned}$$

56. Заключение въ скобки. Для преобразованія многочлена часто бываетъ полезно заключить въ скобки совокупность нѣкоторыхъ его членовъ, при чемъ передъ скобками иногда желательнo поставить +, т.-е. изобразить многочленъ въ видѣ суммы, а иногда —, т.-е. изобразить многочленъ въ видѣ разности. Пусть, напр., въ многочленѣ $a + b - c$ мы желаемъ за-

ключить въ скобки два послѣдніе члена, поставивъ передъ скобками знакъ +. Тогда имѣемъ такъ:

$$a + b - c = a + (b - c),$$

т.-е. внутри скобокъ оставляемъ тѣ же знаки, какіе были въ данномъ многочленѣ. Что такое преобразование вѣрно, убѣдимся, если раскроемъ скобки по правилу сложения; тогда получимъ снова данный многочленъ.

Пусть въ томъ же многочленѣ $a + b - c$ требуется заключить въ скобки два послѣдніе члена, поставивъ передъ скобками знакъ м и н у с ь . Тогда напишемъ такъ:

$$a + b - c = a - (-b + c) = a - (c - b).$$

т.-е. внутри скобокъ передъ всѣми членами перемѣняемъ знаки на противоположныя. Что такое преобразование вѣрно, убѣдимся, если раскроемъ скобки по правилу вычитанія; тогда получимъ снова данный многочленъ.

ГЛАВА II.

Алгебраическое умноженіе.

57. Предварительное замѣчаніе. Такъ какъ показатель степени означаетъ, сколько разъ возвышаемое число надо повторить сомножителемъ, то онъ долженъ быть числомъ цѣлымъ и положительнымъ; возвышаемое же число можетъ быть какое угодно: цѣлое и дробное, положительное и отрицательное, и даже нуль.

58. Умноженіе степеней одного и того же числа. Пусть надо умножить a^4 на a^3 ; другими словами, требуется умножить a^4 на произведеніе трехъ сомножителей: aaa . Но чтобы умножить на произведеніе, достаточно умножить на перваго сомножителя, полученный результатъ на втораго сомножителя и т. д. (§ 36, 2°); поэтому:

$$a^4 a^3 = a^4 (aaa) = \underbrace{aaaa}_{\text{4 разъ}} \underbrace{aaa}_{\text{3 разъ}} = a^{4+3} = a^7.$$

Вообще $a^m a^n = a^m \underbrace{(aaa\dots a)}_{\text{n разъ}} = \underbrace{aaa\dots a}_{\text{m разъ}} \underbrace{aaa\dots a}_{\text{n разъ}} = a^{m+n}.$

Правило. При умноженіи степеней одного и того же числа показатели ихъ складываются.

Примѣры. 1) $aa^6 = a^{1+6} = a^7$, 2) $m^{10}m^3 = m^{10+3} = m^{13}$,
 3) $x^{2n}x^{3n} = x^{2n+3n} = x^{5n}$,
 4) $p^{r-2}p^{r+2} = p^{(r-2)+(r+2)} = p^{r-2+r+2} = p^{2r}$.

59. Умноженіе одночленовъ. Пусть дано умножить $+3a^2b^3c$ на $-5a^3b^4d^2$. Такъ какъ одночленъ $-5a^3b^4d^2$ представляет собою произведение 4-хъ сомножителей: $-5, a^3, b^4, d^2$, то для умноженія одночлена $+3a^2b^3c$ на $-5a^3b^4d^2$ достаточно умножить множимое на перваго сомножителя -5 , результатъ умножить на второго сомножителя a^3 и т. д. Значить:

$$(+3a^2b^3c)(-5a^3b^4d^2) = (+3a^2b^3c)(-5)a^3b^4d^2 = (+3)a^2b^3c(-5)a^3b^4d^2.$$

Въ послѣднемъ произведеніи соединимъ сомножителей въ такую группу (§ 36, 2°).

$$[(+3)(-5)](a^2a^3)(b^3b^4)cd^2 = -15a^5b^7cd^2.$$

Слѣд $(+3a^2b^3c)(-5a^3b^4d^2) = -15a^5b^7cd^2.$

Правило. Чтобы перемножить одночлены, перемножаютъ ихъ коэффициенты, складываютъ показатели одинаковыхъ буквъ, а тѣ буквы, которыя входятъ только въ одного сомножителя, переносятъ въ произведеніе съ ихъ показателями.

Замѣчаніе. При умноженіи коэффициентовъ надо, конечно, руководиться правиломъ знаковъ, т. е. что при умноженіи двухъ чиселъ одинаковые знаки даютъ $+$, а разные $-$.

Примѣры. 1) $(0,7a^3xy^2)(3a^4x^2) = 2,1a^7x^3y^2$.
 2) $(\frac{1}{2}mz^3)^2 = (\frac{1}{2}mz^3)(\frac{1}{2}mz^3) = \frac{1}{4}m^2z^6$,
 3) $(1,2a^r m^{n-1})(\frac{1}{2}am) = 0,9a^{r+1}m^n$,
 4) $(-3,5x^2y)(\frac{2}{3}x^3) = -\frac{7}{3}x^5y$,
 5) $(4a^n b^3)(-7ab^n) = -28a^{n+1}b^{n+3}$

60. Умноженіе многочлена на одночленъ и обратно. Пусть дано умножить многочленъ $a+b-c$ на одночленъ m :

$$(a+b-c)m$$

Всякій многочленъ, какъ мы видѣли (§ 47), представляетъ

собою сумму алгебраических чиселъ. Но чтобы умножить сумму алгебраическихъ чиселъ, достаточно умножить каждое слагаемое отдѣльно и результаты сложить; поэтому:

$$(a+b-c)m = [a+b+(-c)]m = am + bm + (-c)m.$$

Но $(-c)m = -cm$ и $+(-cm) = -cm$, значитъ

$$(a+b-c)m = am + bm - cm.$$

Правило Чтобы умножить многочленъ на одночленъ, умножаютъ на этотъ одночленъ каждый членъ многочлена и полученные произведенія складываютъ.

Такъ какъ произведение не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ сомножителей, то это правило примѣнимо также и къ умноженію одночлена на многочленъ.

Примѣръ. Пусть требуется произвести умноженіе.

$$(3x^3 - 2ax^2 + 5a^2x - 1)(-4a^2x^3).$$

Производимъ дѣйствія въ такомъ порядкѣ.

$$(3x^3)(-4a^2x^3) = -12a^2x^6, \quad (-2ax^2)(-4a^2x^3) = +8a^3x^5, \\ (+5a^2x)(-4a^2x^3) = -20a^4x^4, \quad (-1)(-4a^2x^3) = +4a^2x^3.$$

Искомое произведение будетъ.

$$-12a^2x^6 + 8a^3x^5 - 20a^4x^4 + 4a^2x^3.$$

Примѣры.

- 1) $(a^2 - ab + b^2)3a = a^2(3a) - (ab)(3a) + b^2(3a) = 3a^3 - 3a^2b + 3ab^2,$
- 2) $(7x^3 + \frac{1}{2}ax - 0,3)(2,1a^2x) = (7x^3)(2,1a^2x) + (\frac{1}{2}ax)(2,1a^2x) - \\ - (0,3)(2,1a^2x) = 14,7a^2x^4 + 1,575a^3x^2 - 0,63a^2x.$
- 3) $(5x^{n-1} - 3x^{n-2} + 1)(-2x) = -10a^n + 6x^{n-1} - 2x.$

61 Умноженіе многочлена на многочленъ. Пусть дано умножить:

$$(a+b-c)(d-e)$$

Разсматривая подобное, какъ одночленъ, мы можемъ сдѣлать умноженіе по правилу умноженія одночлена на многочленъ:

$$(a+b-c)(d-e) = (a+b-c)d - (a+b-c)e.$$

Разсматривая теперь выраженіе $a + b - c$, какъ многочленъ, можемъ вторично примѣнить правило умноженія многочлена на одночленъ:

$$(a + b - c)(d - e) = ad + bd - cd - (ae + be - ce).$$

Наконецъ, раскрывъ скобки по правилу вычитанія, получимъ:

$$(a + b - c)(d - e) = ad + bd - cd - ae - be + ce.$$

Правило. Чтобы умножить многочленъ на многочленъ, умножаютъ каждый членъ множимаго на каждый членъ множителя и полученные произведенія складываютъ.

Конечно при умноженіи членовъ надо держаться п р а в л а в н а к о в ь, по которому одинаковые знаки даютъ +, а разные —.

Примѣръ. $(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(a^3 - 3ab^2 + b^3).$

Умножимъ сначала всѣ члены множимаго на 1-й членъ множителя:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)a^3 = a^5 - 5a^4b + a^3b^2 - 3a^3.$$

Затѣмъ умножимъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(-3ab^2) = -3a^3b^2 + 15a^2b^3 - 3ab^4 + 9ab^2.$$

Далѣе умножимъ всѣ члены множимаго на 3-й членъ множителя:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(+b^3) = a^2b^3 - 5ab^4 + b^5 - 3b^3.$$

Наконецъ, сложимъ полученные произведенія и сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ; окончательный результатъ будетъ:

$$a^5 - 5a^4b - 2a^3b^2 - 3a^3 + 16a^2b^3 - 8ab^4 + 9ab^2 + b^5 - 3b^3.$$

Замѣчаніе. Чтобы при умноженіи многочленовъ не пропустить ни одного произведенія, полезно всегда держаться одного какого-нибудь порядка умноженія; напр., какъ это мы сейчасъ дѣлали, умножить сначала всѣ члены множимаго на 1-й членъ множителя, затѣмъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя и т. д.

- Примѣры:** 1) $(a-b)(m-n-p) = am - bm - an + bn - ap + bp$;
 2) $(x^2 - y^2)(x + y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$;
 3) $(3an + 2n^2 - 4a^2)(n^2 - 5an) =$
 $= 3an^3 + 2n^4 - 4a^2n^2 - 15a^2n^3 - 10an^3 + 20a^2n =$
 $= -7an^3 + 2n^4 - 19a^2n^2 + 20a^2n$;
 4) $(2a^2 - 3)^2 = (2a^2 - 3)(2a^2 - 3) = (2a^2)^2 - 3(2a^2) -$
 $-(2a^2)3 + 9 = 4a^4 - 6a^3 - 6a^3 + 9 = 4a^4 - 12a^3 + 9$.

ГЛАВА III.

Умноженіе расположенныхъ много- членовъ.

62. Определеніе. Расположить многочленъ по степенямъ какой-нибудь одной буквы значить, если возможно, написать его члены въ такомъ порядкѣ, чтобы показатели этой буквы увеличивались или уменьшались отъ перваго члена къ послѣднему.

Такъ, многочленъ $1 + 2x + 3x^2 - x^3 - x^4$ расположенъ по возрастающимъ степенямъ буквы x . Тотъ же многочленъ будетъ расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы x , если члены его напишемъ въ обратномъ порядкѣ:

$$-x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

Буква, по которой расположенъ многочленъ, наз. главною его буквой. Когда члены многочлена содержатъ нѣсколько буквъ и ни одной изъ нихъ не приписывается какого-либо особеннаго значенія, то безразлично, какую изъ нихъ считать за главную.

Членъ, содержащій главную букву съ наибольшимъ показателемъ, наз. высшимъ членомъ многочлена; членъ, содержащій главную букву съ наименьшимъ показателемъ, или не содержащій ея вовсе, наз. низшимъ членомъ многочлена.

Чтобы расположить такой многочленъ, въ которомъ есть нѣсколько членовъ съ одинаковыми показателями главной буквы, надо заключить эти члены въ скобки и вынести за скобку общимъ множителемъ главную букву съ ея показателемъ. Напр:

$$\begin{aligned} & 2ax^3 - 4a^2x^2 - \frac{1}{2}ax^2 - 8a^2x + 1 = \\ & = 2ax^3 - (4a^2x^2 + \frac{1}{2}ax^2) - 8a^2x + 1 = \\ & = 2ax^3 - (4a^2 + \frac{1}{2}a)x^2 - 8a^2x + 1 \end{aligned}$$

Здѣсь двучленъ $-(4a^2 + \frac{1}{2}a)$ должно разсматривать, какъ коэффициентъ при x^4 .

63. Умноженіе расположенныхъ многочленовъ всего удобнѣе производить такъ, какъ будетъ указано на слѣдующихъ примѣрахъ.

Примѣръ 1. Умножить $3x-5+7x^2-x^3$ на $2-8x^2+x$.

$$\begin{array}{r}
 -x^3+7x^2+3x-5 \\
 \underline{-8x^2+x+2} \\
 8x^5-56x^4-24x^3+40x^2 \dots \dots \text{произведение множимаго на } -8x^2 \\
 \text{--- } x^5+7x^3+3x^2-5x \dots \text{произведение множимаго на } +x. \\
 \text{--- } 2x^3+14x^2+6x-10 \text{ произведение множимаго на } +2. \\
 \hline
 8x^5-57x^4-19x^3+57x^2+x-10 \text{ полное произведение.}
 \end{array}$$

1°. Расположивъ оба многочлена по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы, пишутъ множителя подъ множимымъ и подъ множителемъ проводятъ черту. Умножаютъ всѣ члены множимаго на 1-й членъ множителя (на $-8x^2$) и полученное частное произведеніе пишутъ подъ чертою. Умножаютъ затѣмъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя (на $+x$) и полученное второе частное произведеніе пишутъ подъ первымъ частнымъ произведеніемъ такъ, чтобы подобныя члены стояли подъ подобными. Такъ же поступаютъ при умноженіи всѣхъ членовъ множимаго на слѣдующіе члены множителя. Подъ послѣднимъ частнымъ произведеніемъ проводятъ черту; подъ этою чертою пишутъ полное произведеніе, складывая всѣ частныя произведенія.

2°. Можно также оба многочлена расположить по возрастающимъ степенямъ главной буквы и затѣмъ производить умноженіе въ томъ порядкѣ, какъ было указано:

$$\begin{array}{r}
 -5+3x+7x^2-x^3 \\
 \underline{2+x-8x^2} \\
 -10+6x+14x^2-2x^3 \dots \dots \text{произведение на } 2. \\
 \text{--- } 5x+3x^2+7x^3-x^4 \dots \dots \text{произведение на } +x. \\
 \text{+ } 40x^2-24x^3-56x^4+8x^5 \dots \text{произведение на } -8x^2. \\
 \hline
 -10+x+57x^2-19x^3-57x^4+8x^5 \dots \text{полное произведение.}
 \end{array}$$

Удобство этих приёмов, очевидно, состоит в томъ, что при этомъ подобные члены располагаются другъ подъ другомъ и, слѣдовательно, ихъ не нужно отыскивать.

Примѣръ 2. Умножить a^3+5a-3 на a^2+2a-1 .

Въ этихъ многочленахъ недостаетъ нѣкоторыхъ промежуточныхъ членовъ; въ такихъ случаяхъ на мѣстахъ этихъ членовъ полезно оставлять пустыя пространства для болѣе удобнаго подписыванія подобныхъ членовъ:

$$\begin{array}{r}
 a^3 \quad \gg \quad +5a \quad -3 \\
 a^2 \quad +2a \quad -1 \\
 \hline
 a^5 \quad \quad +5a^3 - 3a^2 \\
 \quad +2a^4 \quad \quad +10a^2 - 6a \\
 \quad \quad - a^3 \quad \quad - 5a + 3 \\
 \hline
 a^5 + 2a^4 + 4a^3 + 7a^2 - 11a + 3.
 \end{array}$$

64. Высшій и низшій члены произведенія. Изъ разсмотрѣннхъ примѣровъ умноженія расположенныхъ многочленовъ слѣдуетъ:

высшій членъ произведенія равенъ произведенію высшихъ члена множимаго на высшій членъ множителя;

низшій членъ произведенія равенъ произведенію низшаго члена множимаго на низшій членъ множителя.

Остальные члены произведенія могутъ получиться отъ соединенія нѣсколькихъ подобныхъ членовъ въ одинъ. Можетъ даже случиться, что въ произведеніи, послѣ приведенія въ немъ подобныхъ членовъ, всѣ члены уничтожатся кромѣ высшаго и низшаго.

Примѣръ. $x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$

$$\begin{array}{r}
 x-a \\
 \hline
 x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x \\
 -ax^4-a^2x^3-a^3x^2-a^4x-a^5 \\
 \hline
 x^5 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad -a^5 = x^5 - a^5.
 \end{array}$$

65. Число членовъ произведенія. Пусть во множимомъ 5, а во множителѣ 3 члена. Умноживъ каждый членъ множимаго на 1-й членъ множителя, мы получимъ 5 членовъ произведенія, умноживъ каждый членъ множимаго на 2-й членъ

множителя, получимъ еще 6 членовъ произведенія, и т. д.; считать, всѣхъ членовъ произведенія будетъ 5 . 3, т.-е. 15. Вообще, число членовъ произведенія, до соединенія въ немъ подобныхъ членовъ, равно произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя.

Такъ какъ высшій и низшій члены произведенія не могутъ имѣть подобныхъ членовъ, а всѣ прочіе могутъ уничтожиться, то наименьшее число членовъ произведенія, послѣ приведенія въ немъ подобныхъ членовъ, равно 2.

Г Л А В А IV.

Нѣкоторыя формулы умноженія двучленовъ.

66. Полезно обратить особое вниманіе на слѣдующіе 3 случая въ умноженія двучленовъ и запомнить окончательныя формулы.

I. Произведеніе суммы двухъ чиселъ на ихъ разность равно разности квадратовъ тѣхъ же чиселъ; т.-е.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Дѣйствительно: $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$

Напр., $25 \cdot 15=(20+5)(20-5)=20^2-5^2=400-25=375.$

II. Квадратъ суммы двухъ чиселъ равенъ квадрату перваго числа, плюсъ удвоенное произведеніе перваго числа на второе, плюсъ квадратъ втораго числа; т.-е.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Дѣйствительно: $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+\underline{ab}+\underline{ab}+b^2=$
 $=a^2+2ab+b^2.$

Напр., $67^2=(60+7)^2=60^2+2 \cdot 60 \cdot 7+7^2=3600+840+49=4489.$

III. Квадратъ разности двухъ чиселъ равенъ квадрату перваго числа, минусъ удвоенное произведеніе перваго числа на второе, плюсъ квадратъ втораго числа; т.-е.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Дѣйствительно: $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-\underline{ab}-\underline{ab}+b^2=$
 $=a^2-2ab+b^2.$

Напр., $19^2=(20-1)^2=20^2-2 \cdot 20 \cdot 1+1^2=400-40+1=361.$

IV. Кубъ суммы двухъ чиселъ равенъ кубу перваго числа, плюсъ утроенное произведеніе квадрата перваго числа на второе, плюсъ утроенное произведеніе перваго числа на квадратъ второго, плюсъ кубъ втораго числа; т.-е.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$\begin{aligned} \text{Дѣйствительно: } (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = \\ &= a^3 + \underline{2a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{a^2b} + \underline{2ab^2} + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

V. Кубъ разности двухъ чиселъ равенъ кубу перваго числа, минусъ утроенное произведеніе квадрата перваго числа на второе, плюсъ утроенное произведеніе перваго числа на квадратъ второго, минусъ кубъ втораго числа; т.-е.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$\begin{aligned} \text{Дѣйствительно: } (a-b)^3 &= (a-b)^2(a-b) = (a^2-2ab+b^2)(a-b) = \\ &= a^3 - \underline{2a^2b} + \underline{ab^2} - \underline{a^2b} + \underline{2ab^2} - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

Замѣчаніе. Формулы III и V могутъ быть получены соответственно изъ формулъ II и IV (и наоборотъ), если въ послѣднихъ формулахъ замѣнимъ b на $-b$. Дѣйствительно:

$$\begin{aligned} [a+(-b)]^2 &= a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 + (-2ab) + b^2 = a^2 - 2ab + b^2; \\ [a+(-b)]^3 &= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 + (-3a^2b) + \\ &+ 3ab^2 + (-b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

Условившись всякій двучленъ разсматривать, какъ сумму, мы можемъ 4 указаннныя формулы свести къ слѣдующимъ двумъ:

Квадратъ двучлена равенъ квадрату перваго члена, плюсъ удвоенное произведеніе перваго члена на второй, плюсъ квадратъ втораго члена.

Кубъ двучлена равенъ кубу перваго члена плюсъ утроенное произведеніе квадрата перваго члена на второй, плюсъ утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ втораго, плюсъ кубъ втораго члена.

67. Примѣненія. При помощи формулъ предыдущаго параграфа можно иногда производить умноженіе многочленовъ проще, чѣмъ обыкновеннымъ путемъ, какъ это видно изъ слѣдующихъ примѣровъ.

Примѣры.

- 1) $(4a^3-1)^2=(4a^3)^2-2(4a^3) \cdot 1+1^2=16a^6-8a^3+1;$
- 2) $(x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2;$
- 3) $\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3+\frac{3}{4}x^{m-1}y\right)^2=\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3\right)^2+2\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3\right)\left(\frac{3}{4}x^{m-1}y\right)+$
 $\quad +\left(\frac{3}{4}x^{m-1}y\right)^2=\frac{1}{9}x^{4m-2}y^6+\frac{1}{2}x^{3m}y^4+\frac{9}{16}x^{2m+2}y^2;$
- 4) $(x+y+1)(x-y+1)=[(x+1)+y][(x+1)-y]=(x+1)^2-y^2=$
 $=x^2+2x+1-y^2;$
- 5) $(a-b+c)(a+b-c)=[a-(b-c)][a+(b-c)]=a^2-(b-c)^2=$
 $=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-b^2+2bc-c^2;$
- 6) $(2a+1)^3=(2a)^3+3(2a)^2 \cdot 1+3(2a)1^2+1^3=8a^3+12a^2+6a+1;$
- 7) $(1-3x^2)^3=1^3-3 \cdot 1^2 \cdot 3x^2+3 \cdot 1 \cdot (3x^2)^2-(3x^2)^3=1-9x^2+$
 $+27x^4-27x^6.$

ГЛАВА V.

Алгебраическое дѣленіе.

68. Дѣленіе степеней одного и того же числа.

Разсмотримъ особо слѣдующіе три случая:

1⁰. Показатель дѣлимаго больше показателя дѣлителя. Пусть, напр., дано раздѣлить $a^8 : a^3$. Такъ какъ дѣлимое a^8 должно равняться произведенію дѣлителя a^3 на частное, то, принявъ во вниманіе правило умноженія степеней (§ 58), мы найдемъ, что это частное должно содержать въ себѣ букву a съ показателемъ, равнымъ разности показателей дѣлимаго и дѣлителя. Дѣйствительно, если допустимъ, что искомое частное есть a^{8-3} , т.-е. a^5 , то дѣлимое a^8 будетъ произведеніемъ дѣлителя a^3 на это частное. Итакъ,

$$a^8 : a^3 = a^{8-3} = a^5.$$

Вообще: $a^m : a^n = a^{m-n}$, если $m > n$.

Правило. При дѣленіи степеней одного и того же числа показатель дѣлителя вычитается изъ показателя дѣлимаго.

2°. Показатель дѣлимаго равенъ показателю дѣлителя. Въ этомъ случаѣ частное должно равняться 1; напр., $a^5 : a^5 = 1$, потому что $a^5 = a^5 \cdot 1$.

Условимся производить вычитаніе показателей и въ этомъ случаѣ; тогда получимъ въ частномъ букву съ нулевымъ показателемъ: $a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0$. Этотъ показатель не имѣетъ того значенія, какое мы придавали показателямъ раньше, такъ какъ повторить число сомножителемъ 0 разъ нельзя.

Условимся подъ видомъ a^0 разумѣть частное отъ дѣленія одинаковыхъ степеней числа a , и такъ какъ это частное равно 1, то мы должны принять, что $a^0 = 1$. При этомъ соглашеніи высказанное выше правило мы можемъ примѣнять и въ разсматриваемомъ случаѣ.

3°. Показатель дѣлимаго меньше показателя дѣлителя, напр., $a^3 : a^5$. Въ этомъ случаѣ, очевидно, частное не можетъ равняться никакой степени a , ни съ положительнымъ, ни съ нулевымъ показателемъ.

Условимся производить вычитаніе показателей и въ этомъ случаѣ; тогда мы получимъ въ частномъ букву съ отрицательнымъ показателемъ; напр., $a^3 : a^5 = a^{-2}$. Этотъ показатель не имѣетъ того значенія, которое дается положительнымъ показателямъ, такъ какъ нельзя повторить число сомножителемъ —2 раза, —3 раза и т. д. Тѣмъ не менѣе мы будемъ употреблять степени съ отрицательными показателями, условившись понимать ихъ въ такомъ смыслѣ.

Степень съ цѣлымъ отрицательнымъ показателемъ означаетъ частное отъ дѣленія степеней этого числа въ томъ случаѣ, когда показатель дѣлителя превосходитъ показателя дѣлимаго на столько единицъ, сколько ихъ находится въ абсолютной величинѣ отрицательнаго показателя.

Такъ, напр., мы будемъ понимать, что выраженіе a^{-3} означаетъ частное $a : a^4$, или $a^2 : a^5$, или $a^3 : a^6$, вообще такое частное $m : a^{m+3}$, которое получается въ томъ случаѣ, когда показатель дѣлителя больше показателя дѣлимаго на 3 единицы.

При такомъ соглашеніи приведенное выше правило можетъ быть примѣняемо и въ этомъ случаѣ; оно является, такимъ образомъ, общимъ правиломъ дѣленія степеней одного и того же числа.

Замѣчаніе. Букву съ нулевымъ показателемъ, какъ равную единицѣ, мы можемъ приписать ко всякому выраженію въ видѣ множителя или дѣлителя; напр., располагая многочленъ $3x - 4x^2 + 7 + 2x^3$ по степенямъ буквы x , мы можемъ членъ $+7$ разсматривать, какъ $+7x^0$ и писать: $2x^3 - 4x^2 + 7x^0$.

69. Дѣленіе одночленовъ. Пусть дано раздѣлить $12a^7b^5c^2d^3$ на $-4a^4b^3d^3$. Предположимъ, что искомое частное есть какой-нибудь одночленъ. По опредѣленію дѣленія одночленъ этотъ, умноженный на дѣлителя, долженъ составить дѣлимое. Но при умноженіи одночленовъ коэффициенты ихъ перемножаются, показатели одинаковыхъ буквъ складываются, а тѣ буквы, которыя входятъ только въ одного сомножителя, переносятся въ произведение съ ихъ показателями (§ 59). Отсюда слѣдуетъ, что: 1) у искомага частнаго коэффициентъ долженъ быть $12 : (-4)$, т. е. -3 ; 2) показатели у буквъ a и b получаются вычитаніемъ изъ показателей дѣлимаго показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя; 3) буква c должна перейти въ частное со своимъ показателемъ; 4) буква d совсѣмъ не должна войти въ частное, или войти въ него съ показателемъ 0 и 5) никакихъ иныхъ буквъ не можетъ быть въ частномъ. Такимъ образомъ:

$$12a^7b^5c^2d^3 : -4a^4b^3d^3 = -3a^3b^2c^2d^0 = -3a^3b^2c^2.$$

Что найденное частное вѣрно, можно убѣдиться повѣркой: умноживъ $-3a^3b^2c^2$ на $-4a^4b^3d^3$, получимъ дѣлимое.

Правило. Чтобы раздѣлить одночленъ на одночленъ, дѣлять коэффициентъ дѣлимаго на коэффициентъ дѣлителя, вычитаютъ изъ показателей буквъ дѣлимаго показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя и переносятъ въ частное, безъ измѣненія показателей, тѣ буквы дѣлимаго, которыхъ нѣтъ въ дѣлителѣ.

Примѣры.

- 1) $3m^3n^4x : 4m^2nx = \frac{3}{4}mn^2x^0 = \frac{3}{4}mn^2,$
- 2) $-ax^ny^m : \frac{1}{2}axy^2 = -\frac{2}{1}a^0x^{n-1}y^{m-2} = -\frac{2}{1}x^{n-1}y^{m-2},$
- 3) $-0,6a^3(x+y)^4 : -2,5a(x+y)^2 = 0,24a^2(x+y)^2.$

70. Невозможное дѣленіе. Когда частное отъ дѣленія одночленовъ не можетъ быть выражено одночленомъ, то говорятъ, что дѣленіе невозможно. Это бываетъ въ двухъ случаяхъ:

- 1) когда въ дѣлителѣ есть буквы, какихъ нѣтъ въ дѣлимомъ;
- 2) когда показатель какой-нибудь буквы дѣлителя больше показателя той же буквы въ дѣлимомъ.

Пусть, напр., дано раздѣлить $4a^2b$ на $2ac$. Всякій одночленъ, умноженный на $2ac$, даетъ въ произведеніи такой одночленъ, который содержитъ букву c ; но въ нашемъ дѣлимомъ нѣтъ этой буквы; значитъ, частное не можетъ быть выражено одночленомъ.

Также невозможно дѣленіе $10a^3b^2 : 5ab^3$, потому что частное $2a^2b^{-1}$, которое получается въ этомъ случаѣ согласно правилу дѣленія одночленовъ, содержитъ букву b съ отрицательнымъ показателемъ и слѣд., представляетъ собою дробное выраженіе: $2a^2 \cdot \frac{1}{b}$.

71. Дѣленіе многочлена на одночленъ. Пусть требуется раздѣлить многочленъ $a+b-c$ на одночленъ m . Искомое частное можно выразить такъ:

$$(a+b-c) : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$$

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этого равенства, умножимъ предполагаемое частное на дѣлителя m . Если въ произведеніи получимъ дѣлимомъ, то частное вѣрно. Примѣняя правило умноженія многочлена на одночленъ, получимъ:

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}\right)m = \frac{a}{m} \cdot m + \frac{b}{m} \cdot m - \frac{c}{m} \cdot m = a + b - c.$$

Значитъ, предполагаемое частное вѣрно.

Предположимъ, что искомое частное равно какому-нибудь многочлену, и что члены этого многочлена расположены тоже по убывающимъ степенямъ буквы x . Чтобы найти этотъ многочленъ, рассуждаемъ такъ.

Дѣлимое должно равняться произведенію дѣлителя на частное. Изъ умноженія расположенныхъ многочленовъ извѣстно (§ 64), что высшій членъ произведенія получается отъ умноженія высшаго члена множимаго на высшій членъ множителя. Въ дѣлимомъ высшій членъ есть первый, въ дѣлителѣ и частномъ высшіе члены тоже первые. Значитъ, для 1-го члена частного мы можемъ взять такой одночленъ, который, будучи умноженъ на 1-ый членъ дѣлителя, образуетъ 1-й членъ дѣлимаго; поэтому: чтобы найти первый членъ частного, достаточно раздѣлить первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя. Раздѣливъ, находимъ первый членъ частного $2x^2$. Пишемъ его подъ чертою.

Умножимъ всѣ члены дѣлителя на первый членъ частного и полученное произведеніе вычтемъ изъ дѣлимаго. Для этого напишемъ его подъ дѣлимымъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными, и у всѣхъ членовъ вычитаемаго перемѣнимъ знаки на обратные. Получимъ послѣ вычитанія первый остатокъ. Если бы этотъ остатокъ оказался равнымъ нулю, то это значило бы, что въ частномъ никакихъ другихъ членовъ, кромѣ найденнаго перваго, нѣтъ, т.-е. что частное есть одночленъ. Если же, какъ въ нашемъ примѣрѣ, первый остатокъ не есть нуль, то будемъ рассуждать такъ:

Дѣлимое можно рассматривать, какъ сумму произведеній дѣлителя на каждый членъ частного. Мы вычли изъ дѣлимаго произведеніе дѣлителя на 1-й членъ частного; слѣдов., въ 1-мъ остаткѣ заключается произведеніе дѣлителя на 2-й, на 3-й... и т. д. члены частного. Высшій членъ въ остаткѣ есть 1-й; высшій членъ дѣлителя тоже 1-й; высшій членъ въ частномъ (не считая 1-го) есть 2-й членъ. Значитъ, для 2-го члена частного мы можемъ принять такой одночленъ, который, будучи умноженъ на 1-й членъ дѣлителя, образуетъ 1-й членъ остатка; поэтому: чтобы

произведенію низшаго члена множимаго (дѣлителя) на низшій членъ множителя (частпаго), то ходъ разсужденій и порядокъ дѣйствія останутся тѣ же самыя, какъ и въ томъ случаѣ, когда дѣлимое и дѣлитель расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы.

Вотъ еще нѣкоторые примѣры дѣленія многочленовъ:

$$\begin{array}{r} \text{Примѣръ 2. } 28x^4 - 13cx^3 - 26c^2x^2 + 15c^3x \quad \Big| \quad \frac{7x^2 + 2cx - 5c^2}{4x^2 - 3cx} \\ \times \quad \frac{+ 8cx^2 + 20c^2x^2}{-21cx^3 - 6c^2x^2 + 15c^3x} \\ \hline \times \quad \frac{+ 6c^2x^2 + 15c^3x}{0} \end{array}$$

Мы здѣсь не писали произведеній 1-го члена дѣлителя на 1-й, 2-й и т. д. члены частпаго, потому что эти произведенія всегда равны тѣмъ членамъ, подъ которыми они подписываются, и при вычитаніи всегда сокращаются. Обыкновенно такъ и дѣлаютъ.

$$\begin{array}{r} \text{Примѣръ 3. } -\frac{5}{2} + \frac{47}{12}x - 3x^2 + x^3 \quad \Big| \quad \frac{-3 + 2x}{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x^2} \\ \times \quad \frac{-\frac{5}{3}x}{\frac{9}{4}x - 3x^2 \dots} \\ \hline \times \quad \frac{+\frac{3}{2}x^2}{\frac{3}{2}x^2 + x^3} \\ \hline \times \quad \frac{-x^3}{0} \end{array}$$

Подписывая вычитаемыя, мы можемъ писать ихъ прямо съ обратными знаками, какъ это мы дѣлали въ этомъ примѣрѣ. Изъ остатку итѣтъ надобности сносить всё члены дѣлимаго.

74. Признаки невозможности дѣленія многочлена на многочленъ. Когда частное отъ дѣленія многочлена на многочленъ не можетъ быть выражено цѣлымъ многочленомъ (или одночленомъ), то дѣленіе называютъ невозможнымъ. Вотъ признаки невозможнаго дѣленія:

1) Если показатель главной буквы въ высшемъ членѣ дѣлимаго меньше показателя той же буквы въ высшемъ членѣ дѣлителя, то дѣленіе невозможно, потому что тогда нельзя получить высшаго члена частного въ цѣломъ видѣ.

2) Если показатель главной буквы въ низшемъ членѣ дѣлимаго меньше показателя той же буквы въ низшемъ членѣ дѣлителя, то дѣленіе невозможно, потому что тогда нельзя получить низшаго члена частного въ цѣломъ видѣ.

3) Если показатели главной буквы въ высшемъ и низшемъ членахъ дѣлимаго не меньше соотвѣтственно показателей этой буквы въ высшемъ и низшемъ членахъ дѣлителя, то еще нельзя сказать, чтобы дѣленіе было возможно. Въ этомъ случаѣ, чтобы судить о возможности дѣленія, надо приступить въ исполненію самаго дѣйствія и продолжать его до тѣхъ поръ, пока окончательно не убѣдимся въ возможности или невозможности получить цѣлое частное. При этомъ надо различить два случая:

I. Когда многочлены расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы, то продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока или въ остаткѣ не получится 0 (тогда дѣленіе возможно), или пока не дойдутъ до такого послѣдняго остатка, первый членъ котораго содержитъ главную букву съ показателемъ, меньшимъ, чѣмъ первый членъ дѣлителя (тогда дѣленіе невозможно).

II. Когда многочлены расположены по возрастающимъ степенямъ главной буквы, то сколько бы ни продолжать дѣленія, нельзя получить такого остатка, у котораго первый членъ содержалъ бы главную букву съ показателемъ, меньшимъ, чѣмъ у перваго члена дѣлителя, потому что при такомъ расположеніи показатели главной буквы въ первыхъ членахъ остатковъ идутъ, увеличиваясь (см. стр. 76). Въ этомъ случаѣ поступаютъ такъ: предположивъ, что цѣлое частное возможно, вычисляютъ заранѣе послѣдній членъ его, дѣля высшій

членъ дѣлимаго (т.-е. послѣдній) на высшій членъ дѣлителя (на послѣдній). Найдя высшій членъ частнаго, продолжаютъ дѣленіе до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится члена, у котораго показатель главной буквы равенъ показателю вычисленнаго члена. Если при этомъ получится остатокъ, то дѣленіе невозможно, потому что цѣлое частное не должно содержать членовъ выше того, который получится отъ дѣленія высшаго члена дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя.

Примѣръ 1. $(3x^3+5x-8) : (2x^3-4)$.

Дѣленіе невозможно, потому что $3x^3$ не дѣлится на $2x^3$.

Примѣръ 2. $(b^4+5b^3-3b^2+2b) : (b^3-2b^2)$.

Дѣленіе невозможно потому, что $2b$ не дѣлится на $2b^2$.

Примѣръ 3. $10a^4-2a^3 \gg +3a+4 \left| \begin{array}{l} 2a^2-1 \\ 5a^2-a+\frac{5}{2} \end{array} \right.$

$$\begin{array}{r} \gg +5a^2 \\ \hline -2a^3+5a^2+3a... \\ \gg -a \\ \hline 5a^3+2a+4 \\ \gg +\frac{5}{2} \\ \hline 2a+6\frac{1}{2} \end{array}$$

Дѣленіе невозможно, потому что мы дошли до такого остатка, у котораго первый членъ не дѣлится на первый членъ дѣлителя.

Примѣръ 4. $4+3a \gg -2a^2+10a^4 \left| \begin{array}{l} -1+2a^2 \\ -4-3a-8a^2 \end{array} \right.$

$$\begin{array}{r} \gg +8a^2 \\ \hline 3a+8a^2-2a^2 \\ \gg +6a^3 \\ \hline 8a^2+4a^3+10a^4 \\ \gg +16a^4 \\ \hline 4a^3+26a^4 \end{array}$$

Дѣленіе невозможно, потому что, продолжая дѣйствіе, мы

получили бы въ частномъ членъ $-4a^3$, тогда какъ послѣдній членъ цѣлаго частнаго, если бы оно могло существовать, долженъ быть $5a^3$.

75. Зависимость между дѣлимымъ, дѣлителемъ и остаткомъ. Пусть дѣлимое будетъ какой-нибудь многочленъ N , дѣлитель P , частное Q и остатокъ R . Легко убѣдиться, что между этими многочленами существуетъ такая же зависимость, какъ и при арифметическомъ дѣленіи, т.-е. дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, плюсъ остатокъ. Дѣйствительно, изъ процесса дѣленія видно, что остатокъ R получается отъ вычитанія изъ многочлена N всѣхъ членовъ произведенія PQ . Значитъ: $N - PQ = R$, откуда согласно опредѣленію вычитанія слѣдуетъ: $N = PQ + R$.

Этою зависимостью пользуются, когда хотятъ сдѣлать по вѣрку дѣленія многочленовъ; съ этою цѣлью умножаютъ частное на дѣлителя и прибавляютъ къ произведенію остатокъ, если онъ есть; при правильномъ выполненіи дѣйствія въ результатѣ должно получиться дѣлимое.

Примѣръ. Повѣримъ правильность дѣленія въ примѣрѣ 4-мъ предыдущаго параграфа.

$$\begin{array}{r}
 -4 - 3a - 8a^2 \\
 \hline
 -1 + 2a^2 \\
 +4 + 3a + 8a^3 \\
 \hline
 - 8a^2 - 6a^3 - 16a^4 \\
 4 + 3a - 6a^3 - 16a^4 \\
 + 4a^3 + 26a^4 \\
 \hline
 4 + 3a - 2a^3 + 10a^4
 \end{array}$$

Замѣчаніе. Раздѣливъ обѣ части равенства: $N = PQ + R$ на Q , получимъ:

$$\frac{N}{Q} = P + \frac{R}{Q}$$

Этимъ соотношеніемъ иногда пользуются для преобразованія

дробнаго частнаго. Такъ, сдѣлавъ дѣленіе, указанное выше въ примѣрѣ 3-мъ, можемъ написать

$$\frac{10a^4 - 2a^3 + 3a + 4}{2a^2 - 1} = 5a^2 - a + \frac{5}{2} + \frac{2a + 6}{2a^2 - 1}.$$

ГЛАВА VI.

Дѣлимость многочлена, цѣлаго относительно x , на разность $x - a$.

76. Теорема I. Многочленъ, цѣлый относительно x и расположенный по убывающимъ степенямъ этой буквы:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + K$$

при дѣленіи на разность $x - a$ даетъ въ остатокъ число, равное значенію дѣлимаго при $x = a$, т. е. число, равное

$$Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \dots + K$$

До к. Рассмотримъ самый процессъ дѣленія многочлена, о которомъ говорится, на разность $x - a$.

$$\begin{array}{l} Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + K \quad | \quad x - a \\ \underline{+ Aax^{m-1}} \qquad \qquad \qquad \quad Ax^{m-1} + (Aa+B)x^{m-2} + \dots + K \\ 1 \text{ ост.} = \underline{(Aa+B)x^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + K} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad \underline{+ (Aa^2+Ba)x^{m-2}} \\ 2 \text{ ост.} = \underline{(Aa^2+Ba+C)x^{m-2} + Dx^{m-3} + \dots + K} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad \underline{+ (Aa^3+Ba^2+Ca)x^{m-3}} \\ 3 \text{ ост.} = \underline{(Aa^3+Ba^2+Ca+D)x^{m-3} + \dots + K} \end{array}$$

Изъ рассмотрѣнныя остатковъ легко замѣтить, что 4-й остатокъ долженъ быть: $(Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E)x^{m-4} + \dots + K$, 5-й остатокъ окажется: $Aa^5 + Ba^4 + Ca^3 + Da^2 + Ca + F)x^{m-5} + \dots + K$, и т. д. Очевидно, что m -ый остатокъ, содержа въ первомъ своемъ членѣ букву x съ показателемъ $m - m$, равнымъ 0, долженъ быть послѣднимъ, этотъ остатокъ, какъ видно изъ процесса дѣленія, долженъ быть:

$$\begin{aligned} m\text{-ый остатокъ} &= (Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + Da^{m-3} + \dots + K)x^{m-m} = \\ &= Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + Da^{m-3} + \dots + K \\ &\text{(такъ какъ } x^{m-m} = x^0 = 1) \end{aligned}$$

Примѣръ. Многочленъ $x^5 - 3x^3 + 5x - 1$ при дѣленіи на $x - 2$ даетъ остатокъ, равный $2^5 - 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2 - 1 = 29$.

Слѣдствіе 1-е. Такъ какъ сумму $x+a$ можно разсматривать, какъ разность $x-(-a)$, то, применяя къ этой разности доказанную теорему найдемъ:

Многочленъ $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\dots+K$ при дѣленіи на $x+a$ дастъ въ остаткѣ число, равное значенію дѣляимаго при $x=-a$, т.-е. число равное $A(-a)^m+B(-a)^{m-1}+C(-a)^{m-2}+\dots+K$.

Примѣръ. Многочленъ x^5-3x^2+5x-1 при дѣленія на $x+2$ даетъ остатокъ $(-2)^5-3(-2)^2+5(-2)-1=-55$.

Слѣдствіе 2-е. Для того, чтобы многочленъ $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\dots+K$ дѣлился на разность $x-a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x=a$ онъ обращался въ 0.

Это необходимо, такъ какъ если указанный многочленъ дѣлится на $x-a$, то остатокъ отъ дѣленія долженъ равняться 0, а этотъ остатокъ есть то значеніе дѣляимаго, которое онъ принимаетъ при $x=a$. Это достаточно, такъ какъ если многочленъ обращается въ 0 при $x=a$, то это значитъ, что остатокъ отъ дѣленія этого многочлена на $x-a$ равенъ 0.

Примѣръ. Многочленъ x^3-4x^2+9 дѣлится на $x-3$, потому что остатокъ отъ дѣленія равенъ $3^3-4\cdot 3^2+9=0$.

Слѣдствіе 3-е. Для того, чтобы многочленъ $Ax^m+Bx^{m-1}+\dots+K$ дѣлился на сумму $a+a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x=-a$ онъ обращался въ 0.

Это объясняется такъ же, какъ и слѣдствіе 2-е

Примѣръ. Многочленъ $2x^2+x-45$ дѣлится на $x+5$, такъ какъ остатокъ равенъ $2(-5)^2+(-5)-45=0$

77. Теорема 2. Если многочленъ $Ax^m+Bx^{m-1}+\dots+K$ дѣлится на $x-a$ и на $x-b$, при чемъ $a\neq b$, то онъ дѣлится на произведение $(x-a)(x-b)$

Док. Обозначимъ для краткости дѣлимое буквою P_x и частное отъ дѣленія P_x на $x-a$ буквою Q_x . Тогда будемъ имѣть

$$P_x=(x-a)Q_x$$

Вставимъ въ это тождество на мѣсто x число b . Тогда лѣвая его часть обратится въ 0, такъ какъ по условію многочленъ P_x дѣлится на $x-b$; правая же часть равенства будетъ $(b-a)Q_b$, если черезъ Q_b обозначимъ значеніе Q_x при $x=b$, слѣд., мы будемъ имѣть

$$0=(b-a)Q_b$$

Для того, чтобы произведение равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ сомножителей равнялся нулю. Сомножитель $b-a\neq 0$,

такъ какъ по условию $b \neq a$, слѣд $Q_b = 0$. Но если $Q_b = 0$, то Q'_x дѣлится на $x-b$. Обозначивъ частное отъ этого дѣленія черезъ Q'_x , будемъ имѣть

$$Q_x = (x-b)Q'_x, \text{ и, слѣд., } P_x = (x-a)(x-b)Q'_x$$

Отсюда видно, что P_x дѣлится на произведение $(x-a)(x-b)$.

Примѣръ Многочленъ $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ обращается въ 0 при $x=1$ и при $x=2$, слѣд., онъ дѣлится и на $x-1$, и на $x-2$; въ такомъ случаѣ онъ дѣлится на $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$

Замѣчаніе. Подобнымъ же образомъ можно доказать, что если многочленъ $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + K$ дѣлится на $x-a$, на $x-b$, на $x-c$ и т. д., то онъ раздѣлится на произведение $(x-a)(x-b)(x-c)$.

78. Дѣлимость нѣкоторыхъ двучленовъ. Слѣдуетъ обратить особое вниманіе на слѣдующіе случаи дѣлимости двучленовъ:

1) Разность одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ дѣлится на разность тѣхъ же чиселъ, такъ какъ $x^m - a^m$ при дѣленіи на $x-a$ даетъ остатокъ $a^m - a^m = 0$

2) Сумма одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ не дѣлится на разность тѣхъ же чиселъ, такъ какъ $x^m + a^m$ при $x=a$ даетъ остатокъ $a^m + a^m = 2a^m$, что при $a \neq 0$ не равно 0

3) Разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ чиселъ дѣлится, а нечетныхъ не дѣлится на сумму этихъ чиселъ, такъ какъ $x^m - a^m$ при $x=-a$ даетъ $(-a)^m - a^m$, что при m четномъ равно нулю, а при m нечетномъ равно $-2a^m$.

4) Сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ чиселъ дѣлится, а четныхъ не дѣлится на сумму этихъ чиселъ, такъ какъ $x^m + a^m$ при $x=-a$ даетъ $(-a)^m + a^m$, что при m нечетномъ равно нулю, а при m четномъ равно $2a^m$.

Замѣчаніе. 1°. Мы видимъ, что разность $x^m - a^m$ при m четномъ дѣлится и на $x-a$, и на $x+a$; слѣд., согласно теоремѣ 2-й, эта разность при m четномъ дѣлится на произведение $(x-a)(x+a)$, т. е. на $x^2 - a^2$. Такъ, $x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$, $x^6 - a^6 = (x^2 - a^2)(x^4 + a^2x^2 + a^4)$, и т. п.

2°. Полезно имѣть въ виду слѣдующее простое соображеніе, посредствомъ котораго легко возстановить въ памяти указанные четыре случая дѣлимости. Пусть, напр., мы желаемъ вспомнить, когда $x^m + a^m$ дѣлится на $x+a$. Для этого рассуждаемъ такъ. $x^1 + a^1$ дѣлится на $x+a$, а $x^2 + a^2$ не дѣлится на $x+a$, значить, сумма нечетныхъ степеней дѣлится, а сумма четныхъ не дѣлится на $x+a$. Подобнымъ же образомъ легко можемъ вспомнить дѣлимость или недѣлимость и въ остальныхъ изъ указанныхъ случаевъ.

II. Если данный двучленъ представляет собою квадратъ одного числа безъ квадрата другого числа, то его можно замѣнить произведеніемъ суммы этихъ чиселъ на ихъ разность, такъ какъ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Примѣры. 1) $m^4 - n^4 = (m^2)^2 - (n^2)^2 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) =$
 $= (m^2 + n^2)(m+n)(m-n);$
 2) $25x^2 - 4 = (5x)^2 - 2^2 = (5x+2)(5x-2);$
 3) $y^2 - 1 = y^2 - 1^2 = (y+1)(y-1);$
 4) $x^2 - (x-1)^2 = [x+(x-1)][x-(x-1)] =$
 $= (x+x-1)(x-x+1) = 2x-1;$
 5) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = (x+y+x-y)(x+y-x+y) =$
 $= 2x \quad 2y = 4xy.$

III. Если данный трехчленъ представляет собою сумму квадратовъ двухъ чиселъ, увеличенную или уменьшенную удвоеннымъ произведеніемъ этихъ чиселъ, то его можно замѣнить квадратомъ суммы или разности этихъ чиселъ, такъ какъ

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = (b-a)^2.$$

Примѣры. 1) $a^2 + 2a + 1 = a^2 + 2a \cdot 1 + 1^2 = (a+1)^2;$
 2) $x^4 + 4 - 4x^2 = (x^2)^2 + 2^2 - 2(2x^2) = (x^2 - 2)^2 =$
 $= (2 - x^2)^2;$
 3) $-x + 25x^2 + 0,01 = (5x)^2 + (0,1)^2 - 2(5x \cdot 0,1) =$
 $= (5x - 0,1)^2 = (0,1 - 5x)^2;$
 4) $(a+x)^2 + 2(a+x) + 1 = [(a+x) + 1]^2 =$
 $= (a+x+1)^2;$
 5) $4x^8 - x^{24} - 4 = -(x^{24} + 4 - 4x^8) = -(x^8 - 2)^2 =$
 $= -(2 - x^8)^2.$

IV. Иногда многочленъ, состоящій изъ 4 или болѣе членовъ, можно привести къ виду $a^2 - b^2$ или $a^2 \pm 2ab + b^2$, разбивъ его предварительно на подходящія части.

Примѣры. 1) $m^2+n^2-2mn-p^2=(m^2+n^2-2mn)-p^2=$
 $=(m-n)^2-p^2=(m-n+p)(m-n-p);$
 2) $x^2-y^2+6y-9=x^2-(y^2-6y+9)=x^2-(y-3)^2=$
 $=[x+(y-3)][x-(y-3)]=(x+y-3)(x-y+3);$
 3) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=$
 $=(a^2+b^2+2ab)+c^2+(2ac+2bc)=$
 $=(a+b)^2+c^2+2(a+b)c=(a+b+c)^2.$

V. Иногда члены многочлена можно соединять въ нѣсколько группъ, изъ которыхъ каждая разлагается на множителей; если въ числѣ этихъ множителей окажутся общіе, то ихъ можно вынести за скобки.

Примѣры. 1) $ac+ad+bc+bd=(ac+ad)+(bc+bd)=$
 $=a(c+d)+b(c+d)=(c+d)(a+b);$
 2) $12-4x-3x^2+x^3=(12-4x)-(3x^2-x^3)=$
 $=4(3-x)-x^2(3-x)=(3-x)(4-x^2)=$
 $=(3-x)(2+x)(2-x).$

VI. Иногда бываетъ полезно ввести вспомога- тельныя члены, или какой-нибудь членъ разложить на два члена.

Примѣры. 1) $a^3-b^3=a^2-a^2b+a^2b-b^3=a^2(a-b)+b(a^2-b^2)=$
 $=a^2(a-b)+b(a+b)(a-b)=(a-b)[a^2+b(a+b)]=$
 $=(a-b)(a^2+ab+b^2).$
 2) $a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b+b^3=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)=$
 $a^2(a+b)-b(a+b)(a-b)=(a+b)[a^2-b(a-b)]=$
 $=(a+b)(a^2-ab+b^2).$
 3) $2x^2+3xy+y^2=2x^2+2xy+xy+y^2=$
 $=2x(x+y)+y(x+y)=(x+y)(2x+y).$

Разложениа разности и суммы двухъ кубовъ, указанныя въ примѣрахъ 1-мъ и 2-мъ, полезно запомнить:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Въ вѣрности этихъ формулъ легко также убѣдиться непосредственнымъ умноженіемъ многочленовъ, стоящихъ въ правой части равенства.

ГЛАВА VIII.

Алгебраическія дроби.

81. Опреѣленіе. Алгебраической дробью называется частное отъ дѣленія двухъ алгебраическихъ выраженій въ томъ случаѣ, когда дѣленіе только указано. Такъ, $a : b, \frac{a+b}{c-d}$,

$\frac{2x^2-x+5}{x+2}$ и тому подобныя выраженія суть алгебраическія дроби. Въ такихъ выраженіяхъ дѣлимое называется числителемъ, дѣлитель — знаменателемъ, а то и другое — членами дроби.

Замѣтимъ, что алгебраическая дробь отличается существенно отъ арифметической тѣмъ, что члены арифметической дроби всегда числа цѣлыя положительныя, тогда какъ члены алгебраической дроби могутъ быть числами какими угодно, лишь бы только знаменатель не равнялся нулю (такъ какъ дѣленіе на 0 невозможно). Напримѣръ, $\frac{1}{3}$ есть арифметическая дробь, а выраженіе $\frac{1}{-3}$ представляетъ собою частный случай алгебраической дроби. Несмотря однако на это различіе, съ дробями алгебраическими, какъ мы сейчасъ увидимъ, можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какія указаны въ ариметикѣ для дробей арифметическихъ.

82. Основное свойство дроби. Величина дроби не измѣнится, если оба ея члена умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число, не равное нулю.

Пусть имѣемъ дробь $\frac{a}{b}$ и какое-нибудь положительное или отрицательное число m . Требуется доказать, что $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$.

Обозначимъ частное отъ дѣленія a на b черезъ q , а частное отъ дѣленія am на bm черезъ q' , т. е. положимъ, что

$$\frac{a}{b} = q \quad [1], \quad \frac{am}{bm} = q' \quad [2].$$

Докажемъ, что $q=q'$. По опредѣленію дѣленія изъ равенствъ [1] и [2] выводимъ:

$$a=bq \quad [3], \quad am=btq' \quad [4].$$

Умножимъ обѣ части равенства [3] на m (отчего, конечно, равенство не нарушится):

$$am=bqm \quad [5].$$

Сравнивая равенства [5] и [4], находимъ, что оба произведенія: bqm и btq' равны одному и тому же числу am ; поэтому они равны между собою:

$$bqm=btq'.$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на bt (что возможно сдѣлать, такъ какъ числа b и t не нули); равенство отъ этого не нарушится:

$$\frac{bqm}{bt} = \frac{btq'}{bt}, \text{ т.-е. } q=q' \text{ и, слѣд., } \frac{a}{b} = \frac{am}{bt}.$$

Переходя въ этомъ равенствѣ отъ правой части къ лѣвой, видимъ, что величина дроби не измѣняется отъ дѣленія ея членовъ на одно и то же число, не равное нулю.

Оговорка: «не равное нулю» должна быть сдѣлана нами потому, что отъ умноженія членовъ дроби $\frac{a}{b}$ на 0 мы получили

бы частное $\frac{0}{0}$, которое равняется любому числу (§ 39, 2°), а отъ

дѣленія на 0 получили бы невозможное выраженіе $\frac{a:0}{b:0}$ (§ 39, 3°).

83. Приведеніе членовъ дроби къ цѣлому виду. Умножая оба члена дроби на выбранное надлежащимъ образомъ число или алгебраическое выраженіе, мы всегда можемъ преобразовать данную дробь такъ, что числитель и знаменатель ея будутъ цѣлыми алгебраическими выраженіями.

Примѣры.

$$1) \frac{\frac{3}{4}a}{b} = \frac{3a}{4b} \quad (\text{оба члена умножены на 4});$$

$$2) \frac{\frac{7a}{3}}{\frac{2-b}{5}} = \frac{35a}{13b} \quad (\text{на 5}),$$

$$4) \frac{2a + \frac{5}{6}}{1-a} = \frac{12a+5}{6-6a} \quad (\text{на 6});$$

$$3) \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{7-b}{8}} = \frac{16a}{21b} \quad (\text{на 24});$$

$$5) \frac{\frac{ax-1}{1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{ax^2-x}{x-1} \quad (\text{на } x).$$

84. Перемена знаковъ у членовъ дроби.

1°. Перемена знаковъ передъ обоими членами дроби (передъ числителемъ и передъ знаменателемъ) не изменяетъ величины дроби.

$$\text{Напримѣръ, } \frac{-8}{-4} = 2 \text{ и } \frac{8}{4} = 2; \quad \frac{-10}{+2} = -5 \text{ и } \frac{+10}{-2} = -5.$$

2°. Перемена знака передъ какимъ-нибудь однимъ членомъ дроби равносильна перемене знака передъ самою дробью; такъ, если у дроби $\frac{a}{b}$ переменить знакъ передъ числителемъ или передъ знаменателемъ, то получимъ:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b},$$

потому что при дѣлѣніи минусъ на плюсъ и плюсъ на минусъ даютъ минусъ.

Этими двумя свойствами дроби иногда пользуются для нѣкотораго преобразованія ея; напр.,

$$\frac{-3x}{a-b} = \frac{3x}{b-a}, \quad \frac{1-a}{2-b} = \frac{a-1}{b-2}$$

$$\frac{m^2-n^2}{n-m} = \frac{m^2-n^2}{-(m-n)} = -\frac{m^2-n^2}{m-n} = -(m+n).$$

85. Сокращеніе дроби. Если числитель и знаменатель имѣютъ общаго множителя, не равнаго нулю, то на него можно сократить дробь (потому что величина дроби не измѣняется отъ дѣленія обоихъ ея членовъ на одно и то же число, не равное нулю).

Разсмотримъ отдѣльно слѣдующіе два случая сокращенія дробей.

**1-й случай: числитель и знаменатель—
одночлены.**

Примѣры. 1) $\frac{12a^2x^3}{15ax^2y} = \frac{4ax}{5y}$ (сокращено на $3ax^2$),
 2) $\frac{54a^nb^{n-3}}{72ab^{n-1}} = \frac{3a^{n-1}}{4b^2}$ (сокращено на $18ab^{n-3}$).

Правило. Чтобы сократить дробь, у которой числитель и знаменатель одночлены съ цѣлыми коэффициентами, предварительно находятъ общаго наибольшаго дѣлителя коэффициентовъ, приписываютъ къ нему множителями всѣ буквы, которыя входятъ одновременно въ числителя и знаменателя дроби, беря каждую изъ этихъ буквъ съ наименьшимъ показателемъ, съ какимъ она входитъ въ члены дроби; составивъ такое произведеніе ^{*)}, дѣлятъ на него оба члена дроби.

**2-й случай: числитель или знаменатель—
многочлены.**

Примѣры.

1) $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1} = \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-1)} =$
 $= \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1};$
 2) $\frac{n-m}{m^2-n^2} = \frac{-(m-n)}{(m+n)(m-n)} = \frac{-1}{m+n} = -\frac{1}{m+n}.$

^{*)} По аналогіи съ цѣлыми числами это произведеніе можно назвать общимъ наибольшимъ дѣлителемъ числителя и знаменателя дроби.

Правило. Чтобы сократить дробь съ многочленным числителемъ или знаменателемъ, предварительно разлагають многочлены на множителей и затѣмъ сокращають на общихъ множителей, если такіе окажутся*).

86. Приведеніе дробей къ одинаковому знаменателю. Умножая оба члена каждой дроби на выбранное подлежащимъ образомъ число или алгебраическое выраженіе, мы можемъ сдѣлать знаменатели всѣхъ данныхъ дробей одинаковыми. При этомъ могутъ представиться тѣ же 3 случая, какъ и для дробей арифметическихъ, а именно:

1-й случай: знаменатели, всѣ или нѣкоторые, имѣють общихъ множителей.

Чтобы найти въ этомъ случаѣ простѣйшаго общаго знаменателя, составляютъ произведеніе изъ всѣхъ различныхъ множителей, на которые разлагаются знаменатели, беря каждого множителя съ наибольшимъ показателемъ, съ какимъ онъ входитъ въ составъ знаменателей**).

Найдя такое произведеніе, слѣдуетъ затѣмъ выписать для каждой дроби дополнительные множители (не достигающихъ въ ея знаменателѣ для получения общаго знаменателя) и на нихъ умножить оба члена каждой дроби.

Примѣръ 1-й. $\frac{ax}{15x^2y^3}, \frac{y^2}{12x^3z^2}, \frac{az}{18xy^2}$

Такъ какъ $15x^2y^3 = 3 \cdot 5x^2y^3$, $12x^3z^2 = 2^2 \cdot 3x^3z^2$ и $18xy^2 = 2 \cdot 3^2xy^2$, то различные множители, входящіе въ составъ знаменателей,

*) Обращаемъ вниманіе учащихся на ошибку, которую иногда дѣлають при сокращеніи дробей: нельзя сокращать часть числителя съ частью знаменателя. Напримѣръ, было бы вообще ошибочно сократить дробь $\frac{am+b}{cm+d}$ такъ $\frac{a+b}{c+d}$.

**) Такое произведеніе, по аналогіи съ цѣлыми числами, можно назвать наименьшимъ кратнымъ всѣхъ знаменателей.

суть 2, 3, 5, x , y и z . Взявъ каждаго изъ этихъ сомножителей съ наибольшимъ показателемъ, получимъ $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5x^2y^3z^2 = 180x^2y^3z^2$. Это и будетъ общій знаменатель. Дополнительные множители будутъ: для 1-й дроби: $12xz^2$, для 2-й: $15y^3$ для 3-й: $10x^2z^2y$.

Послѣ приведенія дроби будутъ слѣдующія:

$$\frac{12axz^3}{180x^2y^3z^2}, \frac{15y^5}{180x^2y^3z^2}, \frac{10ax^2yz^3}{180x^2y^3z^2}$$

Примѣръ 2-й. $\frac{1}{x^2+2x+1}, \frac{4}{x+2x^2+x^3}, \frac{5}{2x+2x^2}$.

Разлагаемъ знаменатели на множители.

$$\begin{array}{l} x^2+2x+1=(x+1)^2 \\ x+2x^2+x^3=x(x+1)^2 \\ 2x+2x^2=2x(x+1) \\ \text{Общ. знам.} = 2x(x+1)^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{доп. мн. } 2x \\ > > 2 \\ > < x+1. \end{array} \right.$$

Послѣ приведенія дроби будутъ слѣдующія:

$$\frac{2x}{2x(x+1)^2}, \frac{8}{2x(x+1)^2}, \frac{5(x+1)}{2x(x+1)^2}$$

Примѣръ 3-й. $\frac{2}{x^2-a^2}, \frac{1}{a-x}, \frac{3}{x+a}$.

Перемѣнимъ знаки въ знаменателѣ 2-й дроби на противоположные, а чтобы не измѣнилась величина дроби, измѣнимъ знакъ и у ея числителя:

$$\frac{2}{x^2-a^2}, \frac{-1}{x-a}, \frac{3}{x+a}$$

Общ. зн. $= x^2 - a^2$; доп. мн.: для 2-й дроби: $x+a$, для 3-й: $x-a$.

Послѣ приведенія дроби будутъ:

$$\frac{2}{x^2-a^2}, \frac{-x-a}{x^2-a^2}, \frac{3(x-a)}{x^2-a^2}$$

2-й случай: одинъ изъ знаменателей дѣлится на всѣхъ остальныхъ.

Этот знаменатель и будет общимъ. Дробь, имѣющую этою знаменателя, оставляють безъ переменны, а члены каждой изъ остальныхъ дробей умножаютъ на соответствующаго дополнительнаго множителя.

Примѣръ. $\frac{x}{a-b}, \frac{y}{a+b}, \frac{z}{a^2-b^2}$.

Знаменатель a^2-b^2 дѣлится на $a-b$ и на $a+b$. Это и будетъ общій знаменатель. Дополнительный множитель для первой дроби есть $a+b$, для второй $a-b$; послѣ приведенія къ общему знаменателю получимъ:

$$\frac{(a+b)x}{a^2-b^2}, \frac{(a-b)y}{a^2-b^2}, \frac{z}{a^2-b^2}.$$

3-й случай: знаменатели, взятые попарно, не имѣють общихъ множителей.

Въ этомъ случаѣ оба члена каждой дроби надо умножить на произведение знаменателей всѣхъ остальныхъ дробей.

Примѣры. 1) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \dots \dots \dots \frac{adf}{bdf}, \frac{cbf}{dbf}, \frac{efd}{fdb}$;
 2) $\frac{x}{m^2}, \frac{y}{n^2}, \frac{z}{pq} \dots \dots \frac{xn^2pq}{m^2n^2pq}, \frac{ym^2pq}{m^2n^2pq}, \frac{zm^2n^2}{m^2n^2pq}$;
 3) $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a-b} \dots \dots \frac{a(a-b)}{a^2-b^2}, \frac{b(a+b)}{a^2-b^2}$.

87. Сложеніе и вычитаніе дробей. По правилу дѣленія многочлена на одночленъ (§ 71) мы имѣемъ право написать.

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}, \quad \frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}.$$

Читая эти равенства справа налѣво, можемъ вывести слѣдующія правила:

1) чтобы сложить дроби съ одинаковыми знаменателями, складываютъ ихъ числители и подъ суммою подписываютъ того же знаменателя;

2) чтобы вычесть дроби съ одинаковыми знаменателями, изъ числителя уменьшаемаго вычитаютъ числителя вычитаемаго и подъ разностью подписываютъ общаго знаменателя.

Если данныя для сложения или вычитанія дроби имѣютъ разныхъ знаменателей, то предварительно ихъ слѣдуетъ привести къ одинаковому знаменателю.

Примѣры.

(Надъ дробями надписаны дополнительные множители)

$$1) \frac{\overbrace{a}^{df}}{b} + \frac{\overbrace{c}^{bf}}{d} + \frac{\overbrace{e}^{bd}}{f} = \frac{adf + cbf + ebd}{bdf} \quad 2) \frac{\overbrace{3m^2}^{2b}}{10a^2bc} - \frac{\overbrace{5n^2}^{5ca}}{4ab^2} = \frac{6bm^2 - 25acn^2}{20a^2b^2c};$$

$$3) \frac{x+1}{2x-2} + \frac{2x-3}{x+1} - \frac{x^2+3}{2x^2-2}$$

$$2x-2=2(x-1)$$

$$x+1=x+1$$

$$2x^2-2=2(x+1)(x-1)$$

$$\text{Общ. знам.} = 2(x-1)(x+1)$$

$$\text{доп. мн.} = x+1$$

$$> \quad > = 2(x-1)$$

$$> \quad > = 1.$$

Въ результатѣ получимъ:

$$\begin{aligned} & \frac{(x+1)(x+1) + (2x-3)2(x-1) - (x^2+3)}{2(x^2-1)} = \\ & \frac{x^2+2x+1 + (4x^2-6x-4x+6) - x^2-3}{2(x^2-1)} = \\ & \frac{4x^2-8x+4}{2(x^2-1)} = \frac{4(x-1)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{2(x-1)}{x+1}. \end{aligned}$$

1) Обращаемъ внимание учащихся на ошибку, которую иногда дѣлаютъ при вычитаніи дробей. Пусть, напр., дано.

$$\frac{a}{m} - \frac{b+c}{m}$$

Подписывая общаго знаменателя, мы должны помнить, что знакъ минусъ съ относится ко всему числителю $b+c$, а не къ одному члену b , поэтому было бы ошибочно написать такъ

$$\frac{a}{m} - \frac{b+c}{m} = \frac{a-b+c}{m}$$

Правильный результатъ будетъ:

$$\frac{a}{m} - \frac{b+c}{m} = \frac{a-(b+c)}{m} = \frac{a-b-c}{m}$$

Замѣчаніе. Такъ какъ всякое алгебраическое выраженіе можно представить въ видѣ дроби, у которой числителемъ служить это выраженіе, а знаменатель есть 1, то правила сложенія и вычитанія дробей примѣнимы и къ случаямъ, когда какое-либо данное выраженіе есть цѣлое. Напримѣръ:

$$3a^2 \frac{2x}{ab} = \frac{3a^2}{1} \frac{2x}{ab} = \frac{3a^2 \cdot ab}{ab} \frac{2x}{ab} = \frac{3a^3b - 2x}{ab}.$$

88. Умноженіе дробей. Чтобы умножить дробь на дробь, перемножаютъ ихъ числители между собою и знаменателей между собою и первое произведеніе дѣлятъ на второе.

Требуется доказать, что

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Для доказательства положимъ, что

$$\frac{a}{b} = q \text{ и } \frac{c}{d} = q'$$

Откуда: $a = bq$ и $c = dq'$.

Перемножимъ лѣвыя части этихъ двухъ равенствъ между собою и правыя части между собою; такъ какъ при этомъ равныя числа мы умножаемъ на равныя, то и результаты должны быть равны; слѣдов.:

$$ac = bqdq'.$$

Въ правой части этого равенства, пользуясь сочетательнымъ свойствомъ произведенія (§ 36, 2°), соединимъ сомножителей въ такія группы:

$$ac = (bd)(qq').$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на bd , (что возможно

сдѣлать, такъ какъ b и d , какъ знаменатели данныхъ дробей, суть числа, отличныя отъ нуля).

$$\frac{ac}{bd} = qq', \text{ т.-е. } \frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$$

Замѣчанія. 1. Правило умноженія дробей распространяется и на тѣ случаи, когда множимое или множитель—цѣлыя выраженія; напр.:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c};$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}.$$

2. Правило умноженія дробей распространяется и на тотъ случай, когда перемножаются болѣе двухъ дробей; напр.:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}, \quad \frac{e}{f} \cdot \frac{ac}{bd} = \frac{ace}{bdf}.$$

89. Дѣленіе дробей. Чтобы раздѣлить дробь на дробь, умножаютъ числителя первой дроби на знаменатель второй, а знаменателя первой дроби на числителя второй, и первое произведеніе дѣлятъ на второе. Такъ:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Въ этомъ легко убѣдиться повѣркою: умноживъ предполагаемое частное на дѣлителя по правилу умноженія дробей, мы получимъ дѣлимое.

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}.$$

Такъ какъ $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, то можно высказать другое правило: чтобы раздѣлить дробь на дробь, достаточно первую дробь умножить на обратную второй.

Замѣчаніе. Правило дѣленія дроби на дробь можно

примѣнять и къ случаямъ дѣленія дроби на цѣлое и цѣлаго на дробь:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{bc}.$$

90. Примѣръ на преобразованіе дроби. Пусть требуется упростить дробь:

$$\frac{1}{x + \frac{1}{1 + \frac{x+1}{3-x}}}$$

Складываемъ 1 съ дробью $\frac{x+1}{3-x}$:

$$1 + \frac{x+1}{3-x} = \frac{3-x}{3-x} + \frac{x+1}{3-x} = \frac{3-x+x+1}{3-x} = \frac{4}{3-x}.$$

Дѣлимъ 1 на дробь $\frac{4}{3-x}$:

$$1 : \frac{4}{3-x} = \frac{3-x}{4}.$$

Складываемъ x съ этою дробью:

$$x + \frac{3-x}{4} = \frac{4x}{4} + \frac{3-x}{4} = \frac{4x+3-x}{4} = \frac{3x+3}{4}.$$

Наконецъ, дѣлимъ 1 на послѣднюю дробь:

$$1 : \frac{3x+3}{4} = \frac{4}{3x+3} = \frac{4}{3(x+1)}.$$

ГЛАВА IX.

Отрицательные показатели*).

§1. Простейшее значение отрицательнаго показателя. Мы видѣли (§ 68, 3°), что выраженіе a^{-n} , въ которомъ $-n$ есть отрицательное цѣлое число, означаетъ, по условію, частное $\frac{a^m}{a^{m+n}}$, происходящее отъ дѣленія степеней a въ томъ случаѣ, когда показатель дѣлителя больше показателя дѣляимаго на n единицъ. Теперь мы замѣтимъ, что частное это представляетъ собою дробь, которую всегда можно сократить на числителя:

$$a^{-n} = \frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{1}{a^n}.$$

Правило. Число съ отрицательнымъ показателемъ можно замѣнить дробью, у которой числитель есть 1, а знаменатель— то же число съ положительнымъ показателемъ, абсолютная величина котораго равна абсолютной величинѣ отрицательнаго показателя.

Примѣры. $a^{-1} = \frac{1}{a}$; $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$; $(a+x)^{-3} = \frac{1}{(a+x)^3}$.

§2. Приведеніе дробнаго выраженія къ виду цѣлаго. При помощи отрицательныхъ показателей всякое дробное алгебраическое выраженіе можно представить подъ видомъ цѣлаго; для этого стоитъ только всѣхъ множителей, входящихъ въ знаменателя, перепести множителями въ числителя, взявъ ихъ съ отрицательными показателями. Напримѣръ:

$$\frac{3a}{b^2c^3} = 3a \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^3} = 3ab^{-2}c^{-3}.$$

Само собою разумѣется, что такое преобразованіе дробнаго выраженія есть только измѣненіе одного внѣшняго вида этого

*) Эту статью, при желаніи преподающаго, можно проходить непосредственно передъ статьёй „Дробные показатели“, т.-е. передъ § 279

выраженія, а не его содержанія. Однако это измѣненіе въѣяннаго вида имѣеть очень важное значеніе, такъ какъ дѣйствія надъ степенями съ отрицательными показателями можно выполнить по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для показателей положительныхъ. Докажемъ это.

§8. I. Умноженіе. Рассмотримъ отдѣльно три случая:

1) когда только множимое имѣеть отрицательнаго показателя, 2) когда только множитель имѣеть отрицательнаго показателя и 3) когда оба сомножителя съ отрицательными показателями. Предстоитъ доказать, что во всѣхъ этихъ случаяхъ показатели одинаковыхъ буквъ складываются. Для этого поступимъ такъ: вмѣсто числа съ отрицательнымъ показателемъ подставимъ дробь, у которой числитель есть 1, а знаменатель—это же число съ положительнымъ показателемъ, затѣмъ произведемъ дѣйствіе по правилу, относящемуся до дробей, и полученный результатъ сравнимъ съ тѣмъ, который предстоитъ доказать.

1) Требуется доказать, что $a^{-m} \cdot a^n = a^{-m+n}$.

Доказательство: $a^{-m} \cdot a^n = \frac{1}{a^m} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}$.

2) Требуется доказать, что $a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)}$.

Доказательство то же самое.

3) Требуется доказать, что $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)}$.

До к.: $a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m+(-n)}$.

II. Дѣленіе. Предстоитъ доказать, что при дѣленіи степеней одинаковыхъ чиселъ показатель дѣлителя вычитается изъ показателя дѣлимаго и въ томъ случаѣ, когда эти показатели отрицательны. Для этого рассмотримъ также три случая, подобные тѣмъ, которые были нами указаны при умноженіи:

1) Требуется доказать, что $a^{-m} : a^n = a^{-m-n}$.

До к.: $a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$.

2) Требуется доказать, что $a^m : a^{-n} = a^{m-(-n)}$

Д о к.: $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^n = a^{m+n} = a^{m-(-n)}$.

3) Требуется доказать, что $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m-(-n)}$.

Д о к.: $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m-(-n)}$.

Примѣры. 1) $(3a^{-2}b^3c^{4-7}) (0,8a^{n+1}b^{-3}c^{+3}) = 2,4a^{1-n}b^{-1}c^3$.

2) $(x^{2n-1}y^{-m}z^2) : (5x^{-1}y^3z^{-n}) = \frac{1}{5}x^{2n}y^{-m-3}z^{n+2}$.

ГЛАВА X.

Отношеніе и пропорція.

§4. Отношеніе. Повторимъ вкратцѣ то, что извѣстно объ отношеніи изъ ариѳметики.

Отношеніемъ одного значенія величины къ другому значенію той же величины называется отвлеченное число, на которое надо умножить второе значеніе, чтобы получить первое.

Такъ, отношеніе 15 арш. къ 3 арш. есть число 5, потому что $15 \text{ арш.} = 3 \text{ арш.} \times 5$; отношеніе 1 фунта къ 1 пуду есть число $\frac{1}{16}$, потому что $1 \text{ фун.} = 1 \text{ п.} \times \frac{1}{16}$; отношеніе отвлеченнаго числа 25 къ отвлеченному числу 100 равно $\frac{1}{4}$, потому что $25 = 100 \cdot \frac{1}{4}$.

Значенія величины, между которыми разсматривается отношеніе, называются членами отношенія, при чемъ первое значеніе есть предыдущій членъ, а второе значеніе — послѣдующій членъ.

Отношеніе именованныхъ чиселъ можетъ быть замѣнено отношеніемъ отвлеченныхъ чиселъ; для этого достаточно выразить именованныя числа въ одной и той же единицѣ и взять отношеніе получившихся отвлеченныхъ чиселъ. Напримѣръ, отношеніе 10 фун. 16 лот. къ 3 лотамъ равно отношенію 336 лот. къ 3 лот., а это отношеніе равно отношенію отвлеченныхъ чиселъ 336 къ 3.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ говорить только объ отношеніи отвлеченныхъ чиселъ.

Изъ опредѣленія видно, что отношеніе можно разсматривать, какъ частное отъ дѣленія предыдущаго члена на послѣдующій. Поэтому отношеніе обозначается посредствомъ знаковъ дѣленія: такъ, отношеніе a къ b обозначается $a : b$ или $\frac{a}{b}$; въ этомъ видѣ отношеніе можно разсматривать, какъ алгебраическую дробь.

Зависимость между членами отношенія и самимъ отношеніемъ та же самая, какая существуетъ между дѣлимымъ, дѣлителемъ и частнымъ; такъ, обозначивъ отношеніе $a : b$ черезъ q , получимъ:

$$a = bq, \quad b = a : q.$$

Замѣчаніе. Въ арифметикѣ разсматривается отношеніе только арифметическихъ (т. е. положительныхъ) чиселъ; въ алгебрѣ же предполагается, что числа, между которыми разсматривается отношеніе, могутъ быть и положительныя, и отрицательныя; предыдущій членъ можетъ быть и 0 (тогда и отношеніе равно 0), но послѣдующій членъ долженъ быть числомъ, отличнымъ отъ нуля, такъ какъ дѣленіе на 0 невозможно.

95. Пропорція. Равенство, выражающее, что одно отношеніе равно другому отношенію, наз. пропорціей.

Таковы, напр. равенства:

$$8 : 4 = 40 : 20, \quad (+50) : (-10) = (-25) : (+5),$$

которыя можно писать и такъ:

$$\frac{8}{4} = \frac{40}{20}, \quad \frac{+50}{-10} = \frac{-25}{+5}.$$

Изъ 4 чиселъ, составляющихъ пропорцію, 1-е и 4-е наз. крайними членами, 2-е и 3-е — средними членами, 1-е и 3-е — предыдущими, 2-е и 4-е — послѣдующими.

96. Теорема. Во всякой пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ.

Для доказательства назовемъ буквою q каждое изъ отношеній пропорціи $a : b = c : d$; тогда $a = bq$ и $d = \frac{c}{q}$. Перемноживъ

эти два равенства, найдемъ:

$$ad = bq \cdot \frac{c}{q} = \frac{bqc}{q} = bc,$$

что и требовалось доказать.

Отсюда слѣдуетъ: крайній членъ пропорціи равенъ произведенію среднихъ, дѣленному на другой крайній;

средній членъ пропорціи равенъ произведенію крайнихъ, дѣленному на другой средній.

97. Обратная теорема. Если произведеніе двухъ чиселъ (отличныхъ отъ нуля) равно произведенію двухъ другихъ чиселъ, то изъ этихъ 4-хъ чиселъ можно составить пропорцію, беря сомножителей одного произведенія за крайніе, а сомножителей другого произведенія за средніе члены пропорціи.

До к. Пусть даны 4 числа m , n , p и q , удовлетворяющія равенству:

$$mn = pq, \quad [1]$$

при чемъ числа эти отличны отъ нуля. Составимъ новое произведеніе двухъ сомножителей такихъ, чтобы одинъ сомножитель былъ взятъ изъ произведенія mn , а другой—изъ произведенія pq . Такихъ произведеній мы можемъ составить 4, а именно:

$$mp, mq, np \text{ и } nq \quad [2].$$

Раздѣлимъ обѣ части даннаго равенства [1] на каждое изъ составленныхъ нами произведеній [2] (что можно сдѣлать, такъ какъ ни одно изъ этихъ произведеній не равно нулю). Такъ какъ равныя числа при дѣленіи на равныя числа должны дать равныя частныя, то

$$\frac{mn}{mp} = \frac{pq}{mp}, \quad \frac{mn}{mq} = \frac{pq}{mq}, \quad \frac{mn}{np} = \frac{pq}{np}, \quad \frac{mn}{nq} = \frac{pq}{nq}.$$

Сокративъ каждую изъ этихъ дробей, мы получимъ 4 равенства:

$$\frac{n}{p} = \frac{q}{m}, \quad \frac{n}{q} = \frac{p}{m}, \quad \frac{m}{p} = \frac{q}{n}, \quad \frac{m}{q} = \frac{p}{n}.$$

опредѣли равенства представляютъ собою тѣ пропорціи, которыя можно составить, если сомножителей одного изъ данныхъ произведеній [1] возьмемъ за крайніе члены, а сомножителей другого произведенія — за средніе члены. Теорема такимъ образомъ доказана.

98. Перестановка членовъ пропорціи безъ нарушенія ея. Въ каждой пропорціи можно переставлять члены: 1) средніе, 2) крайніе и 3) крайніе на мѣсто среднихъ и средніе на мѣсто крайнихъ. Отъ такихъ перестановокъ пропорція не нарушится, потому что не нарушится равенство между произведеніемъ крайнихъ и произведеніемъ среднихъ.

Выполняя всѣ возможные перестановки, получимъ вмѣсто одной пропорціи 8 пропорцій. Такъ, если данная пропорція есть $a : b = c : d$, то эти 8 пропорцій окажутся такія:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $a : b = c : d$, | 5) $b : a = d : c$, |
| 2) $a : c = b : d$, | 6) $c : a = d : b$, |
| 3) $d : b = c : a$, | 7) $b : d = a : c$, |
| 4) $d : c = b : a$, | 8) $c : d = a : b$. |

Мы ихъ получали слѣдующимъ образомъ: переставивъ въ 1-й данной пропорціи средніе члены, мы получили 2-ю пропорцію; переставивъ въ каждой изъ этихъ двухъ пропорцій крайніе члены, получили 3-ю и 4-ю пропорции; наконецъ, переставивъ въ каждой изъ пропорцій крайніе на мѣсто среднихъ и наоборотъ, мы получили еще 4 пропорціи.

99. Непрерывная пропорція. Среднее геометрическое. Пропорція наз. непрерывной, если у нея одинаковы оба среднихъ или оба крайнихъ члена. Такова, напр., пропорція

$$36 : 12 = 12 : 4 \quad \text{или} \quad 12 : 4 = 36 : 12.$$

Повторяющийся членъ непрерывной пропорціи наз. среднимъ геометрическимъ числомъ двухъ остальныхъ членовъ этой пропорціи. Изъ пропорціи $a : b = b : c$ найдемъ:

$$b^2 = ac; \quad \text{откуда} \quad b = \sqrt{ac},$$

т.е. среднее геометрическое двухъ чиселъ равно корню квадратному изъ произведенія ихъ. Такъ, среднее геометрическое чиселъ 32 и 8 равно $\sqrt{32 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$.

Вообще, среднимъ геометрическимъ n данныхъ чиселъ наз. n -ый корень изъ произведенія всѣхъ этихъ чиселъ; напр., среднее геометрическое трехъ чиселъ: 8, 32 и 2 есть

$$\sqrt[3]{8 \cdot 32 \cdot 2} = \sqrt[3]{512} = 8.$$

100. Среднее арифметическое. Среднимъ арифметическимъ n данныхъ чиселъ наз. $\frac{1}{n}$ часть суммы всѣхъ этихъ чиселъ. Такъ, среднее геометрическое 4-хъ чиселъ: 10, — 2, — 8 и 12 равно:

$$\frac{10 - 2 - 8 + 12}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

101. Сложныя пропорціи. Такъ называются пропорціи, которыя можно получить изъ двухъ или нѣсколькихъ данныхъ пропорцій посредствомъ почленного ихъ перемноженія или дѣленія.

Пусть, напр., имѣемъ двѣ пропорціи:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ и } \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$$

Перемноживъ и раздѣливъ почленно эти два равенства, получимъ такія сложныя пропорціи:

$$1) \frac{aa'}{bb'} = \frac{cc'}{dd'} \text{ и } 2) \frac{ab'}{a'b} = \frac{cd'}{c'd}$$

102. Производныя пропорціи. Такъ называются пропорціи, которыя можно получить изъ одной данной пропорціи (а не изъ нѣсколькихъ, какъ получаютъ сложныя пропорціи) посредствомъ нѣкоторыхъ дѣйствій надъ ея членами.

Пусть имѣемъ пропорцію. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Прибавимъ къ обѣимъ ча-

стямъ этого равенства или отнимемъ отъ нихъ по 1, отчего, конечно, равенство не нарушится:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1.$$

Здѣсь двойные знаки + и — надо пошмать въ соответствии и другъ съ другомъ, т.-е. верхнему знаку въ лѣвой части равенства соответствуетъ верхній знакъ въ правой части, и нижнему знаку въ лѣвой части равенства соответствуетъ нижній знакъ въ правой.

Приведемъ 1 къ общему знаменателю съ дробью, къ которой эта единица прикладывается:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{b}{b} = \frac{c}{d} \pm \frac{d}{d} \text{ или } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}. \quad (1)$$

Получилось равенство, представляющее собою 2 производныя пропорціи; ихъ можно высказать такъ: сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ послѣдующему члену того же отношенія, какъ сумма или разность членовъ втораго отношенія относится къ послѣдующему члену этого отношенія.

Раздѣлимъ равенство (1) на данное равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; тогда знаменатели b и d сократятся, и мы получимъ еще двѣ производныя пропорціи:

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}, \quad (2)$$

которыя можно высказать такъ: сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ предыдущему члену того же отношенія, какъ сумма или разность членовъ втораго отношенія относится къ предыдущему члену этого отношенія.

Равенство (1) представляетъ собою собственно два равенства:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ и } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Раздѣливъ эти равенства почленно, найдемъ третью произ-

водную пропорцію:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad (3)$$

которую можно высказать такъ: сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ втораго отношенія относится къ ихъ разности.

Переставимъ средніе члены въ пропорціяхъ (1), (2) и (3); тогда получимъ еще 3 производныя пропорціи, которыя полезно замѣтить:

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}, \quad \frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c}, \quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$$

Замѣчаніе. Производными пропорціями иногда можно пользоваться для скорѣйшаго нахожденія неизвѣстнаго числа x , входящаго въ пропорцію. Приведемъ примѣры.

Примѣръ 1.
$$\frac{3-x}{x} = \frac{40}{7}.$$

Составимъ производную пропорцію: сумма членовъ перваго отношенія относится къ послѣдующему члену того же отношенія, какъ... Тогда получимъ:

$$\frac{3}{x} = \frac{47}{7}; \text{ откуда } x = \frac{21}{47}.$$

Примѣръ 2.
$$\frac{a+x}{a-x} = \frac{m}{n}.$$

Составимъ производную пропорцію: сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ... Тогда получимъ:

$$\frac{2a}{2x} = \frac{m+n}{m-n} \quad \text{или} \quad \frac{a}{x} = \frac{m+n}{m-n}.$$

Откуда:

$$x = \frac{a(m-n)}{m+n}.$$

103. Свойство равныхъ отношеній. Пусть имѣемъ рядъ нѣсколькихъ равныхъ отношеній:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b}.$$

Обозначимъ черезъ q каждое изъ этихъ отношеній, т.-е. положимъ, что $\frac{a}{b}=q$, $\frac{a_1}{b_1}=q$, и т. д. Такъ какъ предыдущій членъ равенъ послѣдующему, умноженному на отношеніе, то:

$$a=bq, \quad a_1=b_1q \dots \quad a_n=b_nq.$$

Сложимъ эти равенства почленно:

$$a+a_1+a_2+\dots+a_n=bq+b_1q+b_2q+\dots+b_nq=q(b+b_1+b_2+\dots+b_n).$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на $b+b_1+b_2+\dots+b_n$:

$$\frac{a+a_1+a_2+\dots+a_n}{b+b_1+b_2+\dots+b_n}=q=\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\dots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Мы получили, такимъ образомъ, пропорцію, которую можно высказать такъ:

если нѣсколько отношеній равны между собою, то сумма всѣхъ предыдущихъ членовъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, какъ какой-нибудь изъ предыдущихъ относится къ своему послѣдующему.

Замѣчаніе. Такъ какъ пропорція представляетъ собою два равныя отношенія, то это свойство применимо также и къ пропорціи; такъ, если $a:b=c:d$, то $(a+c):(b+d)=a:b=c:d$.

Этимъ свойствомъ пропорціи можно иногда пользоваться для скорѣйшаго нахождения неизвѣстнаго числа x .

Примѣръ.
$$\frac{a-x}{x}=\frac{x}{b-x}.$$

Составимъ новую пропорцію: сумма предыдущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ...:

$$\frac{a}{b}=\frac{a-x}{x}.$$

Теперь составимъ производную пропорцію: сумма членовъ перваго отношенія относится къ послѣдующему, какъ...:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{a}{x}; \quad \text{откуда } x=\frac{ab}{a+b}.$$

ОТДѢЛЪ III.

Уравненія первой степени.

ГЛАВА I.

Общія начала рѣшенія уравненій.

104. Равенство, тождество, уравненіе. Два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знакомъ = составляютъ равенство. Выраженія эти называются частями равенства: то, что стоитъ лѣво отъ знака =, составляетъ лѣвую часть, а то, что стоитъ направо отъ этого знака, составляетъ правую часть равенства. Напримѣръ, въ равенствѣ: $a+2a=3a$ выраженіе $a+2a$ есть лѣвая часть, а $3a$ —правая часть.

Равенства раздѣляются на тождества и уравненія. Тождества подраздѣляются на численные и буквенныя.

Численное тождество есть равенство, въ которое входятъ только числа, выраженныя цифрами; таковы, напр., равенства: $(2+1)^2=(5-2)^2$; $7=7$.

Буквенное тождество есть равенство, у котораго обѣ части суть тождественныя алгебраическія выраженія (§ 3), т.е. такія выраженія, которыя при всевозможныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ нихъ, имѣютъ одинаковыя численные величины; таковы, напр., равенства:

$$(a+b)m=am+bm; (a+1)^2=a^2+2a+1; a=a,$$

и вообще всё тѣ равенства, которыя намъ приходилось до сего времени разсматривать.

Всякое буквенное тождество, послѣ подстановки на мѣсто буквъ какихъ-нибудь чиселъ, обращается въ числовое тождество.

Уравненіемъ называется равенство, у котораго обѣ части имѣютъ одинаковую численную величину не при всякихъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ нихъ, а только при нѣкоторыхъ. Напримѣръ, равенство:

$$3x+5=2x+7$$

есть уравненіе, потому что части его $3x+5$ и $2x+7$ равны не при всякомъ значеніи буквы x , а только при $x=2$; точно такъ же равенство:

$$2x+y=10x-y$$

есть уравненіе, потому что части его имѣютъ одинаковую численную величину не при всякихъ значеніяхъ буквъ x и y (напр., при $x=2$, $y=3$ оно невозможно, тогда какъ при $x=2$, $y=8$ оно вѣрно).

Тѣ буквы въ уравненіи, которымъ нельзя приписывать всевозможныхъ численныхъ значеній, называются неизвѣстными и уравненіями; эти буквы берутся обыкновенно изъ послѣднихъ буквъ алфавита: x , y , z ...

Уравненія могутъ быть съ однимъ неизвѣстнымъ, съ двумя, тремя и болѣе неизвѣстными. Такъ, равенство $3x+5=2x+7$ есть уравненіе съ 1 неизвѣстнымъ, а равенство $2x+y=10x-y$ есть уравненіе съ двумя неизвѣстными.

Числа, которыя, подставленные въ уравненіе вмѣсто его неизвѣстныхъ, обращаютъ это уравненіе въ тождество, называются корнями уравненія или его рѣшеніями; о такихъ числахъ принято говорить, что они удовлетворяютъ уравненію. Напримѣръ, 2 есть корень уравненія $3x+5=2x+7$, потому что при $x=2$ это уравненіе обращается въ тождество $3 \cdot 2 + 5 = 2 \cdot 2 + 7$. Уравненіе $2x+y=10x-y$ имѣетъ корни $x=2$, $y=8$ и многіе другіе. Иногда уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ два корня и болѣе; напр., уравненіе $x^2+2=3x$ удовлетворяется при $x=2$ и $x=1$.

Рѣшить уравненіе значитъ найти всё его корни.

Замѣчаніе. Уравненіе наз. численнымъ, если оно не содержитъ въ себѣ никакихъ другихъ буквъ, кромѣ тѣхъ, которыя означаютъ неизвѣстныя; въ противномъ случаѣ оно называется буквеннымъ. Напр., уравненіе: $3x+5=2x+7$ есть численное, а уравненіе: $ax+b=0$, въ которыхъ буква x означаетъ неизвѣстное, а a и b данныя числа, есть буквенное.

105. Многія задачи можно рѣшать помощью уравненій. Возьмемъ для примѣра такую задачу:

Старшему брату 15 лѣтъ, а младшему 9. Сколько лѣтъ тому назадъ первый былъ втрое старше второго?

Назовемъ неизвѣстное число лѣтъ буквою x . Предположимъ, что это число найдено, и мы желаемъ повѣрить, удовлетворяетъ ли найденное число требованіямъ задачи. Тогда разсуждаемъ такъ: x лѣтъ тому назадъ старшему брату было не 15 лѣтъ, какъ теперь, а $15-x$; младшему брату тогда было не 9 лѣтъ, какъ теперь, а $9-x$. Условіе задачи требуетъ, чтобы $15-x$ было втрое болѣе $9-x$; значить, если $9-x$ умножимъ на 3, то мы должны получить число, равное разности $15-x$; поэтому для x можно взять только такое число, которое удовлетворяетъ уравненію:

$$(9-x)3=15-x.$$

Если сумѣемъ рѣшить это уравненіе, то задача будетъ рѣшена. Мы вскорѣ укажемъ общій способъ рѣшенія подобныхъ уравненій. Теперь же замѣтимъ, что полученное нами уравненіе можно рѣшить такими простыми соображеніями. Такъ какъ произведеніе $(9-x)3$ при всякомъ значеніи x равно $27-3x$, то это уравненіе можно написать такъ:

$$27-3x=15-x.$$

Въ этомъ видѣ лѣвая и правая части уравненія представляютъ собою разности. Сравнивая ихъ между собою, замѣчаемъ, что уменьшаемое въ лѣвой части (т.-е. 27) болѣе уменьшаемаго въ правой части (т.-е. 15) на 12; тогда, чтобы разности были равны, необходимо и достаточно, чтобы и вычитаемое въ лѣвой части (т.-е. $3x$) было болѣе вычитаемого въ правой части (т.-е. x) тоже на 12; но $3x$ болѣе x на $2x$; слѣд., $2x=12$, откуда $x=6$.

Значитъ, 6 лѣтъ тому назадъ старшій братъ былъ втрое старше младшаго.

Только практика научаетъ, какъ, исходя изъ вопроса и условій задачи, составить одно или нѣсколько уравненій; алгебра имѣетъ цѣлью указать способы рѣшенія уже составленныхъ уравненій. Въ этомъ состоитъ другое весьма важное назначеніе этой науки (см. § 4).

Рѣшеніе уравненій основано на нѣкоторыхъ свойствахъ равенствъ вообще и уравненій въ частности; эти свойства мы теперь и рассмотримъ.

106. Нѣкоторыя свойства равенствъ. Всякое равенство, разсматриваемое въ алгебрѣ, мы можемъ сокращенно выразить такъ: $a=b$, если буквою a обозначимъ численную величину лѣвой части равенства и буквою b численную величину правой его части. Замѣтивъ это, мы можемъ главнѣйшія свойства равенствъ выразить слѣдующими очевидными истинами (мы уже неоднократно пользовались ими раньше):

1°. Если $a=b$, то $kb=ka$; т.-е. части равенства можно переставлять.

2°. Если $a=b$ и $c=b$, то $a=c$; т.-е. если два числа равны порознь одному и тому же третьему числу, то они равны и между собою.

3°. Если $a=b$ и $m=n$, то

$$a+m=b+n, \quad a-m=b-n, \quad am=bn;$$

т.-е. если къ равнымъ числамъ придадимъ равныя числа, то и получимъ равныя числа; если отъ равныхъ (чиселъ) отнимемъ равныя (числа), то и получимъ равныя (числа); если равныя умножимъ на равныя, то и получимъ равныя.

4°. Если $a=b$ и $m=n$, то $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$, если только числа m и n не нули (дѣленіе на нуль невозможно, § 39); т.-е. если равныя числа раздѣлимъ на равныя числа, отличныя отъ нуля, то и получимъ равныя числа.

107. Равносильныя уравненія. Уравненія наз. равносильными (а также эквивалентными, однозначащими), если они имѣютъ одни и тѣ же корни. Напр., уравненія:

$$x^2+2=3x \text{ и } x^2-3x+2=0$$

равносильны, потому что у нихъ одни и тѣ же корни (именно: $x=2$ и $x=1$).

Относительно равносильности уравненій мы докажемъ 2 теоремы, которыя можно назвать основными для рѣшенія уравненій; при этомъ для простоты мы будемъ предполагать, что рѣчь идетъ объ уравненіи съ однимъ неизвѣстнымъ (тѣ же самыя разсужденія можно было бы повторить и для уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными).

108. Теорема 1. Если къ обѣимъ частямъ уравненія прибавимъ, или отъ нихъ отнимемъ, одно и то же число, то получимъ новое уравненіе, равносильное первому.

Обозначимъ для краткости лѣвую часть уравненія одною буквою A и правую часть его другою буквою B ; если, напримѣръ, уравненіе будетъ такое:

$$x^2+1=3x-1,$$

то черезъ A мы обозначимъ сумму x^2+1 , а черезъ B разность $3x-1$. Пусть m означаетъ какое-нибудь число (положительное, или отрицательное, или нуль).

Докажемъ, что два уравненія:

$$A=B \quad (1) \quad \text{и} \quad A+m=B+m \quad (2)$$

имѣютъ одни и тѣ же корни. Для этого убѣдимся въ слѣдующихъ двухъ предложеніяхъ:

1°. Каждый корень уравненія (1) принадлежитъ и уравненію (2).

Пусть, напр., число a будетъ корнемъ уравненія (1). Это значитъ, что если въ этомъ уравненіи на мѣсто x поставимъ число a , то выраженія A и B сдѣлаются равными числами. Но тогда и суммы $A+m$, $B+m$ также сдѣлаются равными числами, такъ какъ если къ равнымъ числамъ придадимъ равныя числа, то и получимъ равныя. Слѣд., каждый корень ур. (1) удовлетворяетъ и ур. (2).

2°. Обратпо: каждый корень уравненія (2) принадлежит и уравненію (1).

Пусть, напр., число a' будетъ корнемъ ур. (2). Это значитъ, что если въ этомъ уравненіи на мѣсто x подставимъ число a' , то суммы $A+m$, $B+m$ сдѣлаются равными числами. Но тогда выраженія A и B должны также сдѣлаться равными числами, такъ какъ если отъ равныхъ чиселъ ($A+m$ и $B+m$) отнимемъ равныя числа (m и m), то и получимъ равныя. Значитъ, каждый корень ур. (2) принадлежитъ и ур. (1).

Изъ этихъ двухъ предложеніи слѣдуетъ, что уравненія (1) и (2) имѣютъ одни и тѣ же корни, т.-е. они равносильны.

Переходя отъ ур. (2) къ ур. (1), мы замѣчаемъ, что отъ обѣихъ частей уравненія можно отнять одно и то же число m .

Замѣчаніе. Прибавляемое къ обѣимъ частямъ уравненія или отнимаемое отъ нихъ число можетъ быть дано въ видѣ какого-нибудь буквеннаго выраженія, при чемъ это выраженіе можетъ содержать въ себѣ и неизвѣстныя уравненія¹⁾. Напр., къ обѣимъ частямъ ур. $x^2+1=3x-1$ можно прибавить выраженіе $1-3x$, такъ какъ при всякомъ численномъ значеніи x это выраженіе представляетъ собою нѣкоторое определенное число, а отъ прибавленія къ обѣимъ частямъ уравненія одного и того же числа, какъ мы доказали, получается уравненіе равносильное съ даннымъ.

109. Слѣдствія. 1. Любой членъ уравненія можно перенести изъ одной его части въ другую, перемѣнивъ передъ такимъ членомъ знакъ на противоположный.

Напр., если къ обѣимъ частямъ уравненія $8+x^2=7x-2$ прибавимъ по 2, то получимъ:

$$\begin{array}{r} 8+x^2=7x-2 \\ \quad +2 \quad \quad +2 \\ \hline 8+x^2+2=7x \end{array}$$

¹⁾ Если только прибавляемое выраженіе при всѣхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ данному уравненію, представляетъ собою определенное число (а не принимается, напр., вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{m}{0}$)

Такимъ образомъ, членъ -2 изъ правой части даннаго уравненія перешелъ въ лѣвую съ противоположнымъ знакомъ $+$.

Вычтя изъ обѣихъ частей послѣдняго уравненія по x^2 , получимъ:

$$\begin{array}{r} 8+x^2+2=7x \\ -x^2 \quad -x^2 \\ \hline 8+2=7x-x^2 \end{array}$$

Такимъ образомъ, членъ $+x^2$ перешелъ изъ лѣвой части уравненія въ правую съ противоположнымъ знакомъ $-$.

Можно всѣ члены уравненія перенести въ одну его часть, напр., въ лѣвую; въ такомъ случаѣ въ другой части останется 0. Такъ, перенеся въ уравненіи:

$$2x^2=4x-6$$

члены $4x$ и -6 въ лѣвую часть, получимъ.

$$2x^2-4x+6=0.$$

2°. Если два одинаковые члена съ одинаковыми знаками стоятъ въ разныхъ частяхъ уравненія, то такіе члены можно отбросить. Пусть, напр., даны уравненія:

$$6x+3=x^2+3, \quad 7x^2-x=3-x.$$

Отнявъ отъ обѣихъ частей перваго уравненія по 3 и приложивъ къ обѣимъ частямъ втораго уравненія по x , получимъ:

$$6x-x^2, \quad 7x^2=3.$$

Такимъ образомъ, одинаковые члены $+3$ и $+3$ въ первомъ уравненіи и одинаковые члены $-x$ и $-x$ во второмъ уравненіи уничтожились.

110. Теорема 2. Если обѣ части уравненія умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число, не равное нулю, то получимъ новое уравненіе, равносильное первому.

Пусть $A=B$ есть данное уравненіе и m какое-нибудь число, кромѣ 0; докажемъ, что два уравненія:

$$A=B \quad (1) \quad \text{и} \quad Am=Bm \quad (2)$$

имѣютъ одни и тѣ же корни. Для этого убѣдимся въ слѣдующихъ двухъ предложеніяхъ

1°. Каждый корень уравненія (1) принадлежитъ и уравненію (2).

Пусть, напр., число a будетъ корнемъ ур. (1) Это значитъ, что при $x=a$ выраженія A и B дѣлаются равными числами. Но тогда произведения Am , Bm сдѣлаются равными числами, такъ какъ если равныя числа умножимъ на равныя числа, то и получимъ равныя. Значитъ, каждый корень ур. (1) принадлежитъ и ур. (2).

2°. Обратное, каждый корень уравненія (2) принадлежитъ и уравненію (1).

Пусть, напр., число a' будетъ корнемъ ур. (2), т.-е. пусть при $x=a'$ произведения Am и Bm дѣлаются равными числами. Но тогда и выраженія A и B должны сдѣлаться равными числами, такъ какъ если равныя числа (Am и Bm) раздѣлимъ на равныя числа, отличныя отъ нуля (a мы предположили не равнымъ нулю), то и получимъ равныя. Значитъ, каждый корень ур. (2) принадлежитъ и ур. (1)

Изъ этихъ двухъ предложеній слѣдуетъ, что уравненія (1) и (2) равносильны.

Переходя отъ ур (2) къ ур. (1), мы видимъ, что обѣ части уравненія можно дѣлать на одно и то же число, отличное отъ нуля.

III. Слѣдствія. 1°. Если всѣ члены уравненія имѣютъ общаго множителя, не равнаго нулю, то уравненіе можно на него сократить. Напр.:

$$60x - 160 = 340 - 40x.$$

Раздѣливъ всѣ члены на 20, получимъ уравненіе болѣе простое:

$$3x - 8 = 17 - 2x$$

2°. Передъ всѣми членами уравненія можно переменить знаки на противоположныя, такъ какъ это равносильно умноженію обѣихъ частей уравненія на -1 . Напр., умноживъ обѣ части уравненія.

$$-7x + 2 = -8 - x^2$$

на —1, мы получимъ равносильное уравнение.

$$7x-2=8+x^2.$$

съ противоположными знаками.

Замѣтимъ, что того же самаго мы можемъ достигнуть, если перенесемъ всѣ члены уравненія изъ лѣвой части въ правую, а изъ правой въ лѣвую (§ 109, 1°), и затѣмъ помѣняемъ мѣстами эти части. Такъ, сдѣлавъ такое перенесеніе въ уравненіи: $-7x+2=-8-x^2$, получимъ $8+x^2=7x-2$ и затѣмъ: $7x-2=8+x^2$

3°. Уравненіе можно освободить отъ знаменателей. Напр..

$$\frac{7x-3}{6} - \frac{x-5}{4} = 7,1666\dots$$

Обративъ число 7,166... въ обыкновенную дробь, получимъ $\frac{43}{6}$; теперь приведемъ всѣ члены къ общему знаменателю:

$$\frac{14x-6}{12} - \frac{3x-15}{12} = \frac{86}{12} \quad \text{или} \quad \frac{14x-6-(3x-15)}{12} = \frac{86}{12}.$$

Обросивъ общаго знаменателя, мы тѣмъ самымъ умножимъ обѣ части уравненія на одно и то же, не равное нулю, число 12; отъ этого получимъ уравненіе, равносильное данному и не содержащее дробныхъ членовъ

$$14x-6-(3x-15)=86 \quad \text{или} \quad 14x-6-3x+15=86.$$

112. Замѣчанія 1°. Цельная умножка обѣ части уравненія на нуль, такъ какъ отъ такого умноженія уравненіе перестаетъ существовать, обращаясь въ тождество. $0=0$. Возьмемъ, напр., уравненіе $2x=8$, и умножимъ обѣ его части на 0

$$2x=8 \quad (1) \quad 2x \cdot 0=8 \cdot 0 \quad (2)$$

Уравненіе (1) имѣетъ только одинъ корень, именно $x=4$; уравненіе же (2) удовлетворяется при всякомъ численномъ значеніи x (произведеніе всякаго числа на 0 есть 0), напр., при $x=10$ уравненіе это даетъ: $20 \cdot 0=8 \cdot 0$, т.-е. $0=0$,

при $x = -3$ оно также дает: $(-6) \cdot 0 = 8 \cdot 0$, т.-е. $0 = 0$, и т. д. Такимъ образомъ, отъ умноженія частей уравненія на нуль получается тождество: $0 = 0$, а не уравненіе.

2°. О дѣленіи обѣихъ частей уравненія на нуль нечего говорить, такъ какъ дѣленіе на 0 вообще невозможно (§ 89).

113. Можно ли обѣ части уравненія умножить или раздѣлить на алгебраическое выраженіе?

Для рѣшенія этого вопроса рассмотримъ особо слѣдующіе 2 случая:

1°. Пусть алгебраическое выраженіе, на которое мы умножаемъ или дѣлимъ части уравненія, не содержитъ неизвѣстныхъ. Напр., пусть это будетъ выраженіе $2a - b$, въ которомъ буквы a и b означаютъ какія-нибудь данныя числа. При всякихъ численныхъ значеніяхъ этихъ буквъ выраженіе $2a - b$ представляетъ собою нѣкоторое опредѣленное число, при чемъ число это не есть нуль, если только $2a$ не равно b . Но мы доказали (§ 110), что отъ умноженія или дѣленія обѣихъ частей уравненія на одно и то же число, не равное 0, получается уравненіе, равносильное данному, тогда какъ отъ умноженія или дѣленія частей уравненія на 0 равносильнаго уравненія не получается (§ 112, 1°). Значитъ, на выраженіе $2a - b$ можно умножить или раздѣлить обѣ части уравненія, за исключеніемъ лишь случая, когда $2a = b$.

Вообще, обѣ части уравненія можно умножить или раздѣлить на алгебраическое выраженіе, не содержащее неизвѣстныхъ, при всѣхъ тѣхъ численныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ это выраженіе, при которыхъ оно представляетъ собою какое-нибудь опредѣленное число, не равное 0.

2°. Пусть алгебраическое выраженіе, на которое мы умножаемъ или дѣлимъ части уравненія, содержитъ неизвѣстныя. Напр., пусть обѣ части уравненія: $2x = 8$ мы умножили на выраженіе $x - 3$, содержащее неизвѣстное x . Тогда будемъ имѣть 2 уравненія:

$$2x = 8 \quad (1) \quad \text{и} \quad 2x(x - 3) = 8(x - 3) \quad (2)$$

Посмотримъ, будутъ ли они равносильны. Уравненіе (1) имѣетъ только одинъ корень: $x=4$. Этотъ корень принадлежитъ и уравненію (2), такъ какъ онъ обращаетъ его въ тождество:

$$2 \cdot 4(4-3) = 8(4-3), \text{ т.-е. } 8 \cdot 1 = 8 \cdot 1.$$

Но уравненіе (2) имѣетъ еще свой особый корень: $x=3$. Дѣйствительно, при этомъ значеніи x множителъ $x-3$ обращается въ нуль, и уравненіе (2) даетъ:

$$6 \cdot 0 = 8 \cdot 0, \text{ т.-е. } 0 = 0.$$

Значитъ, уравненіе (1) имѣетъ одинъ корень ($x=4$), тогда какъ уравненіе (2) имѣетъ 2 корня ($x=4$ и $x=3$); изъ этихъ корней послѣдній есть посторонній для даннаго уравненія (1). Такимъ образомъ, уравненія (1) и (2) не равносильны.

Вообще, отъ умноженія или дѣленія обѣихъ частей даннаго уравненія на одно и то же алгебраическое выраженіе, содержащее неизвѣстныя, получается уравненіе, не равносильное данному, такъ какъ этимъ умножимъ или дѣленіемъ мы можемъ ввести новыя рѣшенія, или, наоборотъ, лишить уравненіе нѣкоторыхъ рѣшеній.

Замѣчаніе. Чтобы освободить уравненіе отъ знаменателей, нужно, какъ мы говорили (§ 111, 8°), привести всѣ члены уравненія къ общему знаменателю и затѣмъ его отбросить. Теперь мы должны добавить, что такое отбрасываніе общаго знаменателя (равносильное умноженію на него обѣихъ частей уравненія) возможно безъ всякихъ оговорокъ лишь въ томъ случаѣ, когда отбрасываемый знаменатель не содержитъ въ себѣ неизвѣстныхъ. Если же, какъ это часто бываетъ, неизвѣстныя входятъ и въ знаменатели дробныхъ членовъ уравненія, то, приведя всѣ члены къ общему знаменателю и отбросивъ его, мы должны еще изслѣдовать, не вводимъ ли мы тѣмъ самымъ постороннихъ рѣшеній.

Ниже приведены примѣры (§ 116, примѣры 2-й и 3-й), на которыхъ уясняется, какъ слѣдуетъ поступать въ такихъ случаяхъ.

ГЛАВА II.

Уравненія, содержащія въ знаменателяхъ неизвѣстныя.

114 Изложимъ здѣсь болѣе подробно, какъ слѣдуетъ поступать съ уравненіями, содержащими въ знаменателяхъ неизвѣстныя. Для простоты будемъ говорить лишь объ уравненіяхъ, содержащихъ одно неизвѣстное x . Перенеся всѣ члены уравненія въ лѣвую часть и приведа ихъ къ общему знаменателю, получимъ уравненіе вида:

$$\frac{A}{B} = 0,$$

гдѣ A и B суть алгебраическія выраженія, цѣлыя относительно x . Дробь $\frac{A}{B}$ можетъ равняться нулю только въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ: или 1) когда $A = 0$, или 2) когда $B = \infty$. Разсмотримъ сначала первое предположеніе. Положимъ, что, рѣшивъ уравненіе $A=0$, мы нашли корни: $x_1=a$, $x_2=b$ и т. д. Подставимъ эти корни въ B . Если ни одинъ изъ нихъ не обратитъ B въ нуль, то всѣ эти корни годны для данного уравненія. Если же какой-нибудь изъ нихъ, напр., $x_1=a$, обратитъ B въ нуль, то этотъ корень должно подвергнуть испытанію, такъ какъ неопредѣленное выраженіе $\frac{0}{0}$

получаемое въ этомъ случаѣ для дроби $\frac{A}{B}$, можетъ оказаться неравнымъ 0. Чтобы раскрыть истинный смыслъ неопредѣленного выраженія (§ 146), замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ многочлены A и B дѣлятся на $x-a$ (§ 76, слѣдствіе 2-е), и потому мы можемъ сократить дробь $\frac{A}{B}$ на $x-a$; тогда получимъ новую дробь $\frac{A_1}{B_1}$; если при $x=a$ числитель A_1 равняется 0, а знаменатель B_1 не равенъ 0, то корень $x=a$ годится; если при $x=a$ и A_1 и B_1 равны 0, то этотъ корень надо испытать (по предыдущему); если же при $x=a$ числитель A_1 не равенъ 0, то этотъ корень надо отбросить.

Разсмотримъ теперь второе предположеніе, т.-е. допустимъ, что $B = \infty$. Такъ какъ знаменатель B есть цѣлый многочленъ (или одночленъ), то онъ можетъ обратиться въ ∞ только при $x = \infty$. При этомъ значеніи x дробь $\frac{A}{B}$ принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть истинный смыслъ этого неопредѣленного выраженія, предположимъ сначала, что степень B выше степени A . Пусть, напр., $A = x^2 - 7x + 2$ и $B = x^3 + 4x^2 - 3x + 1$, т.-е. дробь имѣетъ видъ:

$$\frac{x^2 - 7x + 2}{x^3 + 4x^2 - 3x + 1} = 0 \text{ и вообще } \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots}{px^n + qx^{n-1} + \dots} = 0 \text{ (} n > m \text{)}.$$

Въ этомъ случаѣ истинное значеніе выраженія $\frac{\infty}{\infty}$ есть нуль. Дѣйстви-
тельно, раздѣливъ числителя и знаменателя на степень x , высшую въ
числитель, получимъ:

$$\frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0 \text{ и вообще } \frac{a + \frac{b}{x} + \dots}{px^{n-m} + qx^{n-m-1} + \dots} = 0.$$

Положивъ теперь $x = \infty$, получимъ тождество: $0 = 0$. Значитъ, когда
степень знаменателя выше степени числителя, урав-
неніе $\frac{A}{B} = 0$ сверхъ корней уравненія $A = 0$ имѣетъ еще
особый корень $x = \infty$ ¹⁾.

Пусть теперь степень знаменателя будетъ ниже или равна степени
числителя. Напр.:

$$\frac{A}{B} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5} = 0 \text{ и вообще } \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots}{px^n + qx^{n-1} + \dots} = 0 \quad (n \leq m).$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя на степень x , высшую въ знаме-
натель, получимъ:

$$\frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 - \frac{5}{x^2}} = 0 \text{ и вообще } \frac{ax^{m-n} + bx^{m-n-1} + \dots}{p + \frac{q}{x} + \dots} = 0.$$

Положимъ $x = \infty$, получимъ невозможное равенство $\frac{1}{2} = 0$ ($\frac{a}{p}$, если
 $m = n$, и ∞ , если $m > n$). Слѣдов., когда степень знаменателя
не выше степени числителя, уравненіе $\frac{A}{B}$ не имѣетъ
иныхъ корней, кромѣ тѣхъ, которые принадлежатъ
уравненію $A = 0$.

Примѣръ 1-й. $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$.

¹⁾ Включеніе значенія $x = \infty$ въ число корней уравненія во многихъ
случаяхъ бываетъ полезно. Во-первыхъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ такое
рѣшеніе уравненія даетъ вполнѣ опредѣленный отвѣтъ на вопросъ задачи;
напр., когда отыскиваютъ разстояніе точки пересѣченія двухъ прямыхъ
отъ нѣкоторой постоянной точки, рѣшеніе $x = \infty$ означаетъ, что линіи
должны быть параллельны другъ другу (см., напр., задачу § 144). Во-вто-
рыхъ бесконечное рѣшеніе означаетъ, что по мѣрѣ безпредѣльнаго увели-
ченія x обѣ части уравненія неограниченно стремятся къ равенству другъ
съ другомъ, что иногда имѣетъ весьма цѣнное значеніе.

Перенесъ всё члены въ лѣвую часть и приведа ихъ къ общему знаменателю, получимъ:

$$\frac{2x-1}{x^2-4} = 0.$$

Дробь, стоящая въ лѣвой части уравненія, несократима. Отбросимъ знаменателя, получимъ:

$$2x - 1 = 0, \text{ откуда } x = \frac{1}{2}.$$

Такъ какъ степень знаменателя выше степени числителя, то данное уравненіе имѣетъ еще особый корень $x = \infty$. Дѣйствительно,

$$\frac{1}{\infty-2} + \frac{1}{\infty-2} = \frac{1}{\infty^2-4}, \text{ т.е. } 0 + 0 = 0.$$

Замѣтимъ, что если бы въ этомъ примѣрѣ мы не обратили вниманія на отброшеннаго знаменателя, то не замѣтили бы одного корня именно $x = \infty$.

Примѣръ 2-й. $\frac{x^2}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2x+2}{(x-2)^2}.$

Перенесъ всё члены въ лѣвую часть и приведа ихъ къ общему знаменателю, получимъ:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2} = 0.$$

Числитель дроби представляетъ произведеніе $(x-2)(x-1)$; поэтому дробь можно сократить на $x-2$; послѣ сокращенія получимъ:

$$\frac{x-1}{x-2} = 0, \quad x-1 = 0, \text{ откуда } x=1.$$

Особаго корня въ этомъ примѣрѣ нѣтъ, такъ какъ степень знаменателя не выше степени числителя.

Замѣтимъ, что если бы въ этомъ примѣрѣ мы отбросили общаго знаменателя, не перенося всёхъ членовъ въ одну часть уравненія, то получили бы лишній корень $x = 2$.

Г Л А В А III.

Уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

115. Подраздѣленіе уравненій. По числу неизвѣстныхъ уравненія раздѣляются на уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, съ двумя неизвѣстными, съ тремя и болѣе неизвѣстными. Кроме того, уравненія раздѣляются по степенямъ неизвѣстныхъ: уравненія первой степени, уравненія второй степени, и т. д.

Чтобы судить о степени данного уравненія, его надо предварительно, посредствомъ нѣкоторыхъ преобразованій, привести къ такому виду, при которомъ правая часть уравненія не содержитъ неизвѣстныхъ, а лѣвая представляетъ собою многочленъ (или одночленъ), цѣлый относительно неизвѣстныхъ. Преобразования эти въ большинствѣ уже намъ извѣстны; это—раскрытие скобокъ, если онѣ есть, освобожденіе уравненія отъ знаменателей, перенесеніе всѣхъ членовъ, содержащихъ неизвѣстныя, въ лѣвую часть уравненія и приведеніе подобныхъ членовъ. Впослѣдствіи мы укажемъ еще одно преобразование (освобожденіе уравненія отъ радикаловъ), которое потребно для той же цѣли. Когда всѣ эти преобразованія выполнены, то

степенью уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ наз. показатель при неизвѣстномъ въ томъ членѣ уравненія, въ которомъ этотъ показатель наибольшій;

степенью уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными наз. сумма показателей при неизвѣстныхъ въ томъ членѣ уравненія, въ которомъ эта сумма наибольшая.

Напр., ур. $5x^2 - 3x = 4$ есть уравненіе второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ, ур. $5x^2y - xy + 8x = 0$ есть уравненіе третьей степени съ 2 неизвѣстными.

116. Рѣшеніе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Пусть требуется рѣшить уравненіе:

$$\frac{2(x-5)}{3} = \frac{3(2-x)}{2} - x.$$

Для этого выполнимъ слѣдующія преобразованія:

1°. Раскроемъ скобки:

$$\frac{2x-10}{3} = \frac{6-3x}{2} - x.$$

2°. Освободимъ уравненіе отъ знаменателей:

$$4x-20=18-9x-6x.$$

3°. Перенесемъ всё члены, содержаще неизвѣстное, въ лѣвую часть уравненія, а остальные члены въ правую часть:

$$4x + 9x + 6x = 18 + 20.$$

4°. Сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ:

$$19x = 38.$$

Если данное уравненіе, какъ взятое нами, п е р в о й степени, то послѣ указанныхъ преобразованій оно приведетсѣ къ такому виду, при которомъ каждая его часть состоитъ только изъ одного члена, а именно: лѣвая часть состоитъ изъ члена, содержащаго x въ первой степени, а правая изъ члена, не содержащаго x . Такой видъ называется н о р м а л ь н ы м ъ в и д о м ъ уравненія 1-й степени съ 1 неизвѣстнымъ.

Чтобы рѣшить уравненіе, приведенное къ нормальному виду, надо сдѣлать еще одно послѣднее преобразование:

5°. Раздѣлимъ обѣ части уравненія на коэффициентъ при неизвѣстномъ:

$$\frac{19x}{19} = \frac{38}{19}; \text{ откуда: } x=2.$$

Такъ какъ каждое изъ указанныхъ преобразованій приводитъ къ уравненію, равносильному съ уравненіемъ не преобразованнымъ, то, значитъ, и послѣднее полученное нами уравненіе ($x=2$) равносильно съ даннымъ; по ур. $x=2$, очевидно, имѣетъ корень 2 и притомъ только этотъ одинъ; значитъ, и данное уравненіе должно имѣть тотъ же корень, и притомъ только одинъ.

Найдя корень уравненія, мы должны п о в ѣ р и т ь правильность рѣшенія; для этого подставимъ въ данное (не преобразованное) уравненіе вмѣсто x найденное число; если послѣ подстановки получимъ тождество, то уравненіе рѣшено правильно. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, подставивъ на мѣсто x найденное число 2, получимъ:

$$\frac{2(2-5)}{3} = \frac{3(2-2)}{2} - 2, \text{ т.-е. } -2 = -2.$$

Значитъ, уравненіе рѣшено правильно.

Само собою разумѣется, что не во всѣхъ случаяхъ потребны всё пять указанныхъ преобразованій.

Для уясненія нѣкоторыхъ особенностей при рѣшеніи уравненій рассмотримъ еще слѣдующіе примѣры.

Примѣръ 1. Знаменатели не содержатъ неизвѣстнаго.

$$\frac{8x}{3} - 4 - \frac{5x-3}{6} + x = \frac{7-\frac{x-3}{2}}{3} - \frac{8}{9}.$$

Для рѣшенія этого уравненія сначала приведемъ члены каждой дроби къ цѣлому виду (см. § 83):

$$\frac{8x-12}{27} - \frac{5x-3}{6} + x = \frac{14-x+3}{6} - \frac{8}{9}.$$

Найдя общаго знаменателя 54, подписываемъ надъ каждымъ членомъ уравненія дополнительнаго множителя:

$$\frac{\overset{2}{8x-12}}{27} - \frac{\overset{9}{5x-3}}{6} + x = \frac{\overset{9}{17-x}}{6} - \frac{\overset{6}{8}}{9}.$$

Затѣмъ приводимъ къ общему знаменателю всѣ члены уравненія, отбрасываемъ его и поступаемъ далѣе, какъ обыкновенно:

$$16x - 24 - 45x + 27 + 54x = 153 - 9x - 48;$$

$$16x - 45x + 54x + 9x = 153 - 48 + 24 - 27; \quad 34x = 102; \quad x = 3..$$

Повѣрка: $\frac{8-4}{9} - 2 + 3 = \frac{7}{3} - \frac{8}{9}$, т.-е. $\frac{13}{9} = \frac{13}{9}$.

Примѣръ 2. Знаменатели содержатъ неизвѣстное, при чемъ отбрасываніе общаго знаменателя не вводитъ посторонняго корня.

$$\frac{2x+1}{2x-1} + \frac{8}{1-4x^2} = \frac{2x-1}{2x+1}.$$

Чтобы удобнѣе привести всѣ члены этого уравненія къ общему знаменателю, перемѣнимъ въ знаменателѣ второй дроби

знаки на противоположные, а чтобы отъ этого не измѣнилась величина дроби, перемѣнимъ знакъ передъ дробью (см. § 84, 2°):

$$\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{8}{4x^2-1} = \frac{2x-1}{2x+1}.$$

Такъ какъ $4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$, то это и есть общій знаменатель; дополнительные множители будутъ: для первой дроби $2x+1$, для третьей $2x-1$:

$$(2x+1)^2-8=(2x-1)^2; \quad 4x^2+4x+1-8=4x^2-4x+1; \\ 8x=8; \quad x=1.$$

Въ этомъ примѣрѣ для освобожденія уравненія отъ знаменателей намъ пришлось откинуть общаго знаменателя $4x^2-1$, т.-е. намъ пришлось обѣ части уравненія умножить на выраженіе $4x^2-1$, содержащее неизвѣстное; тогда слѣдуетъ убѣдиться, не будетъ ли найденный корень $x=1$ постороннимъ, т.-е. не обращаетъ ли онъ въ 0 выраженіе $4x^2-1$, на которое намъ пришлось умножить обѣ части даннаго уравненія. Подставивъ 1 вмѣсто x въ выраженіе $4x^2-1$, мы получаемъ 3, а не 0. Значитъ, найденный корень не есть посторонній. И, дѣйствительно, данное уравненіе при $x=1$ обращается въ тождество:

$$\frac{3}{1} + \frac{8}{-3} = \frac{1}{3}; \quad 3 - 2 = \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Примѣръ 3. Знаменатели содержатъ неизвѣстное, при чемъ отбрасываніе общаго знаменателя вводитъ посторонній корень.

$$3 + \frac{1}{x-2} = \frac{4x-7}{x-2}.$$

Освободивъ уравненіе отъ знаменателей, получимъ:

$$3x-6+1=4x-7, \quad 3x-4x=-7+6-1; \quad -x=-2.$$

Умноживъ обѣ части уравненія на -1 , найдемъ: $x=2$.

Такъ какъ для освобожденія уравненія отъ знаменателей намъ пришлось умножить обѣ части его на выраженіе $x-2$,

¹⁾ Это уравненіе имѣетъ еще корень $= \infty$ (см. § 114)

содержащее неизвѣстное, то слѣдуетъ рѣшить, не будетъ ли найденный корень постороннимъ. Подставивъ 2 вмѣсто x въ выраженіе $x-2$, получаемъ 0. Изъ этого заключаемъ, что корень $x=2$ можетъ быть постороннимъ. Чтобы рѣшить это окончательно, надо сдѣлать подстановку:

$$3 + \frac{1}{0} = \frac{1}{0}.$$

Въ такомъ видѣ равенство ничего не выражаетъ, такъ какъ дѣленіе на 0 невозможно. Значитъ рѣшеніе $x=2$ является постороннимъ для данного уравненія, которое совсѣмъ не имѣетъ корней.

Примѣръ 4. Уравненіе, приводящееся къ тождеству.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - 25 = \frac{5}{6}(x-30).$$

По освобожденіи отъ знаменателей, получимъ.

$$3x + 2x - 150 = 5(x - 30)$$

или

$$5x - 150 = 5x - 150,$$

или

$$5x - 5x = 150 - 150, \text{ т.-е. } 0 = 0.$$

Это равенство есть тождество, т.-е. оно вѣрно при всякомъ значеніи x . Значитъ, данное уравненіе имѣетъ произвольные корни.

Примѣръ 5. Уравненіе, приводящееся къ нелѣпому равенству.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5\left(\frac{x}{4} - \frac{x}{12}\right) + 7.$$

По раскрытіи скобокъ и освобожденіи отъ знаменателей, находимъ:

$$6x + 4x = 15x - 5x + 84$$

или

$$10x = 10x + 84,$$

или

$$10x - 10x = 84, \text{ т.-е. } 0 = 84.$$

Такъ какъ это равенство невозможно, то уравненіе не имѣеть ни одного корня.

ГЛАВА IV.

Система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

117. **Нормальный видъ уравненія первой степени съ 2 неизвѣстными.** Возьмемъ для примѣра слѣдующее уравненіе:

$$2(2x+3y-5) = \frac{5}{8}(x+3) + \frac{3}{4}(y-4).$$

Съ цѣлью упростить это уравненіе, сдѣлаемъ на немъ тотъ же рядъ преобразованій, какой былъ указанъ раньше для уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, а именно:

1°. Раскроемъ въ уравненіи скобки:

$$4x+6y-10 = \frac{5}{8}x + \frac{15}{8} + \frac{3}{4}y - 3.$$

2°. Освободимъ уравненіе отъ знаменателей.

$$32x+48y-80 = 5x+15+6y-24.$$

3°. Перенесемъ всѣ члены, содержаще неизвѣстныя, въ лѣвую часть уравненія, а всѣ остальные члены въ правую его часть:

$$32x+48y-5x-6y = 15-24+80.$$

4°. Сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ:

$$27x+42y = 71.$$

Если данное уравненіе съ 2 неизвѣстными есть уравненіе 1-ой степени, то послѣ указанныхъ преобразованій оно приведетъ къ такому виду, при которомъ въ лѣвой части уравненія находятся только 2 члена, одинъ съ неизвѣстнымъ x въ первой степени, другой съ неизвѣстнымъ y въ первой степени, правая же часть уравненія состоитъ изъ одного члена, не содержащаго

неизвѣстныхъ. Такой видъ наз. **нормальнымъ видомъ** уравненія 1-ой степени съ 2 неизвѣстными. Коэффициенты при x и y нормальнаго вида уравненія могутъ быть или оба положительныя числа, какъ во взятомъ нами примѣрѣ, или оба отрицательныя числа (этого случая, впрочемъ, можно избѣжать, умноживъ всѣ члены уравненія на -1), или одинъ — число положительное, а другой — число отрицательное; членъ, не содержащій неизвѣстныхъ, можетъ быть и положительнымъ числомъ (какъ въ нашемъ примѣрѣ), и отрицательнымъ, и даже нулемъ.

118. Неопредѣленность одного уравненія съ 2 неизвѣстными. Одно уравненіе съ 2 неизвѣстными допускаетъ безчисленное множество корней. Для примѣра возьмемъ такое уравненіе:

$$3x - 5y = 2.$$

Если вмѣсто одного неизвѣстнаго, напр., y , будемъ подставлять произвольныя числа, напр., такія: 0, 1, 2, 3..., то послѣ всякой подстановки будемъ получать уравненіе, съ однимъ неизвѣстнымъ x , рѣшивъ это уравненіе, найдемъ для x число, соответствующее взятой величинѣ y . Если, напр., $y=0$, то получимъ: $3x=2$, откуда $x=\frac{2}{3}$; если $y=1$, то $3x-5=2$, откуда $x=\frac{7}{3}$, и т. д.

Уравненіе, имѣющее безчисленное множество корней, называется **неопредѣленнымъ**. Одно уравненіе съ 2 неизвѣстными (будетъ ли оно первой степени или какой-нибудь иной) принадлежитъ къ неопредѣленнымъ.

119. Система уравненій. Нѣсколько уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными: x, y, z, \dots , составляютъ систему уравненій, если извѣстно, что каждая изъ буквъ x, y, z, \dots должна означать одно и то же число для всѣхъ уравненій. Если, напр., два уравненія:

$$2x - 5 = 3y - 2 \quad \text{и} \quad 8x - y = 2y + 21$$

рассматриваются при томъ условіи, что каждая изъ буквъ x и y

должна имѣть одинаковыя численныя значенія для обоихъ уравненій, то такія уравненія образуютъ систему.

Для показанія того, что данныя уравненія образуютъ систему, ихъ обыкновенно пишутъ одно подъ другимъ и слѣва отъ нихъ ставятъ фигурную скобку:

$$\begin{cases} 2x-5=3y-2 \\ 8x-y=2y+21. \end{cases}$$

Рѣшить систему уравненій значитъ найти всѣ числа, которыя удовлетворяютъ этой системѣ (корни уравненій), т.-е. найти всѣ числа, которыя, подставленныя въ данныя уравненія вмѣсто неизвѣстныхъ, обращаютъ ихъ въ тождества.

Для рѣшенія системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными существуетъ нѣсколько способовъ. Всѣ они имѣютъ цѣлью привести два уравненія съ двумя неизвѣстными къ одному уравненію съ однимъ неизвѣстнымъ или, какъ говорятъ, имѣютъ цѣлью исключить одно неизвѣстное.

120. Способъ подстановки. Возьмемъ для примѣра такую систему:

$$\begin{cases} 8x-5y=16 \\ 10x+3y=17 \end{cases}$$

(каждое уравненіе предварительно приведено къ нормальному виду). Желая исключить x , поступимъ такъ: изъ перваго уравненія опредѣлимъ x въ зависимости отъ другого неизвѣстнаго y (для чего, конечно, надо членъ $-5y$ перенести направо и затѣмъ раздѣлить обѣ части уравненія на 8):

$$x = \frac{5y-16}{8}.$$

Такъ какъ второе уравненіе должно удовлетвориться тѣми же значеніями неизвѣстныхъ, какъ и первое, то мы можемъ подставить въ него вмѣсто x найденное для него выраженіе, отчего получимъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ y :

$$10 \cdot \frac{5y-16}{8} + 3y = 17.$$

Рѣшимъ это уравненіе:

$$\frac{5(5y-16)}{4} + 3y = 17; \quad 25y - 80 + 12y = 68, \quad 37y = 148; \quad y = 4;$$

тогда:
$$x = \frac{5y-16}{8} = \frac{5 \cdot 4 - 16}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Мы могли бы, предположивъ x найденнымъ, опредѣлить изъ одного уравненія y въ зависимости отъ x и полученное для y выраженіе подставить въ другое уравненіе.

Правило. Чтобы рѣшить систему двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными способомъ подстановки, опредѣляютъ изъ какого-либо уравненія одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого и полученное выраженіе вставляютъ въ другое уравненіе; отъ этого получается одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ; рѣшивъ его, опредѣляютъ это неизвѣстное; подставивъ найденное число въ выраженіе, выведенное раньше для перваго неизвѣстнаго, опредѣляютъ и это другое неизвѣстное.

Замѣчаніе. Этотъ способъ особенно удобенъ тогда, когда коэффициентъ при исключаемомъ неизвѣстномъ равенъ 1.

121. Способъ сравненія. Пусть имѣемъ ту же систему:

$$\begin{cases} 8x - 5y = -16 \\ 10x + 3y = 17. \end{cases}$$

Желая исключить x , опредѣлимъ это неизвѣстное изъ каждаго уравненія въ зависимости отъ другого неизвѣстнаго y :

$$x = \frac{5y-16}{8}, \quad (1) \quad x = \frac{17-3y}{10} \quad (2)$$

Такъ какъ въ обоихъ уравненіяхъ неизвѣстныя должны означать одни тѣ же числа, то мы можемъ полученныя для x два выраженія соединить знакомъ равенства (сравнить ихъ между собою):

$$\frac{5y-16}{8} = \frac{17-3y}{10}.$$

Откуда: $25y - 80 = 68 - 12y; \quad 37y = 148; \quad y = 4.$

Подставивъ это число въ одну изъ формулъ (1) или (2), найдемъ x :

$$x = \frac{5 \cdot 4 - 16}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad x = \frac{17 - 3 \cdot 4}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Неизвестное x мы могли бы также найти, исключивъ способомъ сравненія y .

Правило. Чтобы изъ двухъ уравненій исключить одно неизвестное по способу сравненія, надо изъ каждаго уравненія опредѣлить одно и то же неизвестное въ зависимости отъ другого и полученныя два выраженія соединить знакомъ равенства.

122. Способъ сложенія или вычитанія. Предположимъ сначала, что въ данной системѣ уравненій (приведенныхъ предварительно къ нормальному виду) коэффициенты при какомъ-нибудь одномъ и томъ же неизвестномъ, напримѣръ, при y , будутъ одинаковы. При этомъ могутъ представиться два случая: или знаки передъ такими коэффициентами разные, или они одинаковы. Рассмотримъ одновременно оба эти случая. Пусть, напр., данныя системы будутъ такія:

$$\begin{array}{l|l} \text{1-я система} & \text{2-я система} \\ \left\{ \begin{array}{l} 7x-2y=27 \\ 5x+2y=33 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} 5x+8y=81 \\ 3x+8y=25. \end{array} \right. \end{array}$$

Сложимъ почленно уравненія первой системы и вычтемъ почленно уравненія второй системы:

$$\begin{array}{l|l} 7x-2y=27 & 5x+8y=31 \\ 5x+2y=33 & -3x+8y=-25 \\ \hline 12x & =60 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 5x+8y=31 \\ -3x+8y=-25 \\ \hline 2x & =6. \end{array} \right.$$

Такимъ образомъ, одно неизвестное исключилось. Изъ полученныхъ уравненій находимъ:

$$x = \frac{60}{12} = 5 \quad \left| \quad x = \frac{6}{2} = 3.$$

Вставивъ въ одно изъ данныхъ уравненій вмѣсто x найденное для него число, найдемъ y :

$$\begin{array}{l|l} 7 \cdot 5 - 2y = 27 & 5 \cdot 3 + 8y = 31 \\ y = 4 & y = 2. \end{array}$$

Возьмемъ теперь систему двухъ уравненій, въ которыхъ коэффициенты при одномъ и томъ же неизвестномъ неодинаковы, напр., такую:

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x+6y=29 \\ -5x+8y=10. \end{array} \right.$$

Мы можемъ исключить изъ этой системы любое изъ двухъ неизвѣстныхъ. Напримѣръ, чтобы исключить y , предварительно преобразуемъ уравненія такъ, чтобы передъ y коэффициенты оказались одинаковыми. Чтобы достигнуть этого, достаточно объ части перваго уравненія умножить на коэффициентъ при y во второмъ уравненіи, т.-е. на 8, а объ части втораго уравненія умножить на коэффициентъ при y въ первомъ уравненіи, т.-е. на 6:

$$\begin{array}{r} 7x+6y=29 \text{ (на 8)} \quad 56x+48y=232 \\ -5x+8y=10 \text{ (на 6)} \quad -30x+48y=60. \end{array}$$

Такимъ образомъ, этотъ случай всегда можно привести къ первому. Послѣ этого остается только сложить или вычесть преобразованныя уравненія. Въ нашемъ примѣрѣ знаки передъ y въ обоихъ уравненіяхъ одинаковы, а потому для исключенія y надо уравненія почленно вычесть:

$$\begin{array}{r} 56x+48y=232 \\ \mp 30x \pm 48y = -60 \\ \hline 86x \quad = 172; \text{ откуда } x=2. \end{array}$$

Другое неизвѣстное мы можемъ найти или посредствомъ подстановки въ одно изъ данныхъ уравненій вмѣсто x найденнаго для него числа, или исключивъ изъ данной системы неизвѣстное x такимъ же путемъ, какимъ мы сейчасъ исключили y .

Замѣчаніе. Чтобы коэффициенты передъ y оказались не только равными, но и наименьшими, слѣдуетъ найти наименьшее кратное коэффициентовъ y , т.-е. въ нашемъ примѣрѣ 6-и и 8-и (это будетъ 24), и умножить объ части каждаго уравненія на соответствующаго дополнительнаго множителя:

$$\begin{array}{r} 7x+6y=29 \text{ (на 4)} \quad 28x+24y=116 \\ -5x+8y=10 \text{ (на 3)} \quad -15x+24y=30. \end{array}$$

Вычтя почленно уравненія, получимъ: $43x=86$, $x=2$.

Правило. Чтобы изъ двухъ уравненій (приведенныхъ къ нормальному виду) исключить одно неизвѣстное по способу сложенія или вычитанія, надо сначала уравнять въ обоихъ

уравненіяхъ коэффициенты при исключаемомъ неизвѣстномъ, а потому сложить оба уравненія, если знаки передъ этимъ неизвѣстнымъ разные, или изъ одного уравненія вычесть почленно другое, если знаки передъ исключаемымъ неизвѣстнымъ одинаковые.

123. Для строгаго обоснованія способа сложенія или вычитанія докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема. Если въ системѣ уравненій замѣнимъ какое-нибудь одно изъ нихъ новымъ уравненіемъ, которое получится отъ почленного сложенія уравненій системы, то получимъ другую систему, равносильную данной.

Док. Пусть намъ дана система уравненій:

$$A = B, A_1 = B_1, A_2 = B_2; \dots \quad (1)$$

Сложимъ почленно эти уравненія:

$$A + A_1 + A_2 + \dots = B + B_1 + B_2 + \dots$$

и этимъ новымъ уравненіемъ замѣнимъ какое-нибудь одно изъ данныхъ уравненій, напр., 1-е; тогда получимъ другую систему:

$$A + A_1 + A_2 + \dots = B + B_1 + B_2 \dots; A_1 = B_1; A_2 = B_2; \dots \quad (2)$$

Требуется доказать, что системы (1) и (2) равносильны, т.-е. что онѣ имѣютъ одни и тѣ же корни. Для этого достаточно убѣдиться, что всѣ корни системы (1) принадлежатъ и системѣ (2), и обратно: всѣ корни системы (2) принадлежатъ и системѣ (1).

Пусть система (1) удовлетворяется при $x = a, y = b \dots$. Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ выраженія $A, A_1, A_2 \dots$ дѣлаются соответственно равными выраженіямъ $B, B_1, B_2 \dots$. Очевидно тогда, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ сумма $A + A_1 + A_2 + \dots$ дѣлается равной суммѣ $B + B_1 + B_2 + \dots$; значитъ, эти значенія неизвѣстныхъ удовлетворяютъ системѣ (2). Такимъ образомъ, всѣ корни системы (1) принадлежатъ и системѣ (2).

Обратно, положимъ, что система (2) допускаетъ корни $x = a', y = b' \dots$. Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ суммы $A + A_1 + A_2 + \dots$ и $B + B_1 + B_2 + \dots$ дѣлаются равными между собой, а также и выраженія A_1 и B_1, A_2 и B_2 и т. д. Но тогда очевидно, что при тѣхъ же значеніяхъ неизвѣстныхъ и выраженія A и B дѣлаются равными, т.-е. удовлетворяются и система (1). Значитъ, всѣ корни системы (2) принадлежатъ и системѣ (1).

Отсюда слѣдуетъ, что системы (1) и (2) равносильны.

Замѣчаніе 1-е. Прежде чѣмъ складывать почленно уравненія данной системы, можно предварительно умножить члены каждаго изъ нихъ, или только нѣкоторыхъ, на какія-нибудь числа, не равныя нулю, такъ какъ послѣ такого умноженія получаются уравненія равносильныя.

Въ частности мы можемъ, напр., члены какого-нибудь одного уравненія или нѣсколькихъ уравненій умножить предварительно на -1 ; другими словами, мы можемъ нѣкоторыя уравненія почленно вычесть. Если, напр., въ указанной выше системѣ (1) мы умножимъ на -1 члены второго уравненія, а потомъ всѣ уравненія сложимъ, то получимъ уравненіе:

$$A - A_1 + A_2 + \dots = B - B_1 + B_2 + \dots,$$

которымъ мы можемъ замѣнить любое изъ уравненій данной системы.

Замѣчаніе 2-е. Способы подстановки и сравненія могутъ быть разсматриваемы какъ слѣдствія изъ доказанной теоремы. Положимъ, напр., мы имѣемъ систему:

$$2x - 3y = 1 \text{ и } 5x + 7y = 17. \quad (1)$$

Ее можно замѣнить такою:

$$x = \frac{1 + 3y}{2}, \quad x = \frac{17 - 7y}{5}, \quad (2)$$

потому что уравненія послѣдней системы равносильны соответственно уравненіямъ первой системы. Вычтя почленно уравненія системы (2), мы можемъ, по доказанному, замѣнить ее новою системою:

$$x = \frac{1 + 3y}{2}, \quad 0 = \frac{1 + 3y}{2} - \frac{17 - 7y}{5}. \quad (3)$$

Преобразуя второе уравненіе системы (3), мы можемъ представить ее двояко:

$$x = \frac{1 + 3y}{2}, \quad 5 \cdot \frac{1 + 3y}{2} + 7y = 17 \text{ (способъ подстановки)}$$

или

$$x = \frac{1 + 3y}{2}, \quad \frac{1 + 3y}{2} = \frac{17 - 7y}{5} \text{ (способъ сравненія).}$$

Г Л А В А V.

Система трехъ уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными.

124. Нормальный видъ уравненія первой степени съ 3 неизвѣстными. Если въ уравненіи 1-й степени съ 3 неизвѣстными x , y и z мы сдѣлаемъ тѣ же преобразованія, какія были нами прежде указаны для уравненій съ 1 и 2 неизвѣстными (§§116, 117), то мы приведемъ уравненіе къ такому **н о р м а л ь н о м у** виду, при которомъ въ лѣвой части уравненія находятся только три члена: одинъ съ x , другой съ y и третій съ z (коэффициентами при этихъ неизвѣстныхъ

могутъ быть числа и положительныя, и отрицательныя), а правая часть уравненія состоитъ изъ одного члена, не содержащаго неизвѣстныхъ. Таково, напр., уравненіе $5x - 3y - 4z = -12$.

Одно уравненіе съ 3 неизвѣстными и система 2 уравненій съ 3 неизвѣстными допускаютъ вообще безчисленное множество корней, потому что въ первомъ случаѣ двумъ неизвѣстнымъ, а во второмъ—одному неизвѣстному можно придавать произвольныя значенія, число которыхъ бесконечно велико.

Система трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными рѣшается тѣми же способами, какіе указаны выше для системы двухъ уравненій.

Покажемъ примѣненіе этихъ способовъ на слѣдующемъ примѣрѣ (каждое уравненіе предварительно приведено къ нормальному виду):

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7 \\ 7x + 4y - 8z = 3 \\ 5x - 3y - 4z = -12. \end{cases}$$

125. Способъ подстановки. Изъ одного уравненія, напр. изъ перваго, опредѣлимъ какое-нибудь неизвѣстное, напр. x , въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ:

$$x = \frac{7 + 2y - 5z}{3}.$$

Подставимъ это выраженіе въ остальные уравненія:

$$\begin{aligned} 7 \cdot \frac{7 + 2y - 5z}{3} + 4y - 8z &= 3, \\ 5 \cdot \frac{7 + 2y - 5z}{3} - 3y - 4z &= -12. \end{aligned}$$

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ двумъ уравненіямъ съ двумя неизвѣстными.

Рѣшивъ ихъ по какому-нибудь изъ способовъ, указанныхъ прежде, найдемъ: $y = 3$, $z = 2$; подставивъ эти числа въ выраженіе для x , выведенное раньше, найдемъ и это неизвѣстное:

$$x = \frac{7 + 2 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{3} = 1.$$

126. Способъ сравненія. Изъ каждаго уравненія опредѣлимъ одно и то же неизвѣстное въ зависимости отъ двухъ другихъ неизвѣстныхъ. Отъ этого получимъ 3 выраженія для одного и того же неизвѣстнаго. Соединивъ знакомъ = первое выраженіе со вторымъ и первое съ третьимъ (вообще, одно изъ этихъ выраженій съ каждымъ изъ остальныхъ), получимъ два уравненія съ 2 неизвѣстными.

$$x = \frac{7+2y-5z}{3} = \frac{3-4y+8z}{7} = \frac{3y+4z-12}{5},$$

$$\frac{7+2y-5z}{3} = \frac{3-4y+8z}{7}, \quad \frac{7+2y-5z}{3} = \frac{3y+4z-12}{5}.$$

Рѣшивъ эти два уравненія, получимъ. $y=3, z=2$. Вставивъ эти значенія въ одно изъ трехъ выраженій, выведенныхъ раньше для x , найдемъ: $x=1$.

127. Способъ сложенія или вычитанія. Изъ уравненій 1-го и 2-го исключимъ какое-нибудь неизвѣстное способомъ сложенія или вычитанія; отъ этого получимъ одно уравненіе съ 2 неизвѣстными. Потомъ изъ уравненій 1-го и 3-го (или 2-го и 3-го) тѣмъ же способомъ исключимъ то же неизвѣстное; отъ этого получимъ еще одно уравненіе съ 2 неизвѣстными. Пусть, напр., желаемъ исключить z :

1) $3x-2y+5z=7$	(на 8)	$24x-16y+40z=56$
2) $7x+4y-8z=3$	(на 5)	$35x+20y-40z=15$
		$59x+4y \quad =71$
1) $3x-2y+5z=7$	(на 4)	$12x-8y+20z=28$
3) $5x-3y-4z=-12$	(на 5)	$25x-15y-20z=-60$
		$37x-23y \quad =-32$

Рѣшимъ полученныя два уравненія: $x=1, y=3$. Вставимъ эти числа въ одно изъ данныхъ уравненій, на примѣръ, въ первое:

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 5z = 7; \quad 5z = 10; \quad z = 2.$$

Замѣчаніе. Для исключенія одного неизвѣстнаго мы брали въ этомъ примѣрѣ 1-е уравненіе со 2-мъ, потомъ 1-е съ 3-мъ; но нѣтъ надобности держаться такого порядка. Можно взять 1-е ур. со 2-мъ, потомъ 2-е съ 3-мъ; или 1-е съ 3-мъ, потомъ 2-е съ 3-мъ,—однимъ словомъ, надо взять какое-нибудь изъ трехъ уравненій съ каждымъ изъ остальныхъ.

Г Л А В А VI.

**Система уравнений первой степени
со многими неизвестными.**

128. Общее замѣчаніе. Рѣшеніе системы n ур. съ n неизвѣстными состоитъ въ томъ, что посредствомъ исключенія одного неизвѣстнаго приводятъ эту систему къ другой, въ которой однимъ уравненіемъ и однимъ неизвѣстнымъ меньше; изъ этой системы снова исключаютъ одно неизвѣстное, отчего получаютъ еще однимъ уравненіемъ и однимъ неизвѣстнымъ меньше. Продолжаютъ такое послѣдовательное исключеніе до тѣхъ поръ, пока не получатъ одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

129. Способъ подстановки. Изъ одного уравненія опредѣляютъ какое-нибудь неизвѣстное въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ; полученное выраженіе вставляютъ вмѣсто исключаемаго неизвѣстнаго въ остальные уравненія. Отъ этого получаютъ $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными. Съ этою системою поступаютъ точно такъ же. Продолжаютъ исключеніе неизвѣстныхъ до тѣхъ поръ, пока не получится одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ. Рѣшивъ его, находятъ значеніе этого неизвѣстнаго. Вставивъ это значеніе въ формулу, выведенную для того неизвѣстнаго, которое исключили въ послѣдній разъ, получаютъ значеніе другого неизвѣстнаго. Вставивъ эти два значенія въ формулу, выведенную для того неизвѣстнаго, которое исключили въ предпослѣдній разъ, находятъ значеніе третьяго неизвѣстнаго. Продолжаютъ такъ до тѣхъ поръ, пока не будутъ получены значенія всѣхъ неизвѣстныхъ.

130. Способъ сравненія. Изъ каждаго уравненія опредѣляютъ одно неизвѣстное въ зависимости отъ остальныхъ. Получаютъ такимъ образомъ для одного и того же неизвѣстнаго столько выраженій, сколько уравненій, положимъ n . Соединивъ закомъ—одно изъ такихъ выраженій со всѣми остальными, получаютъ $n-1$ ур. съ $n-1$ неизвѣстными. Съ этою системою поступаютъ точно также.

Замѣчаніе. Нѣтъ надобности соединять знакомъ = непременно одно и то же выраженіе со всеми остальными: можно, напр. 1-е выраженіе соединить со 2-мъ, 2-е съ 3-мъ, 3-е съ 4-мъ и т. д., или какъ нибудь иначе; надо лишь заботиться о томъ, чтобы всѣ $n-1$ уравненій были независимы одно отъ другаго.

131. Способъ сложенія или вычитанія. Берутъ два уравненія, напр., первое и второе, исключаютъ изъ нихъ одно неизвѣстное способомъ сложенія или вычитанія (конечно, уравняя предварительно коэффициенты передъ исключаемымъ неизвѣстнымъ). Отъ этого получаютъ одно уравненіе съ $n-1$ неизвѣстными. Потомъ берутъ одно изъ взятыхъ прежде уравненій, напр., второе, вмѣстѣ съ какимъ-нибудь изъ остальныхъ, напр., съ третьимъ, и тѣмъ же способомъ исключаютъ изъ нихъ то же неизвѣстное; отъ этого получаютъ другое уравненіе съ $n-1$ неизвѣстными. Затѣмъ берутъ одно изъ раиѣ взятыхъ уравненій, напр., третье, вмѣстѣ съ однимъ изъ остальныхъ, напр., съ четвертымъ, и исключаютъ изъ нихъ то же самое неизвѣстное; отъ этого получаютъ третье уравненіе съ $n-1$ неизвѣстными. Перебравъ такимъ образомъ всѣ n уравненій, получаютъ $n-1$ ур. съ $n-1$ неизвѣстными. Съ этой системой можно поступать точно такъ же, какъ и съ первой.

ГЛАВА VII.

Нѣкоторые частные случаи системъ уравненій.

132. Разсмотримъ нѣкоторые случаи, когда при рѣшеніи системы уравненій полезно отступать отъ общихъ приѣмовъ.

1 Случай, когда не всѣ неизвѣстныя входятъ въ каждое уравненіе; напр.:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x - y + 3z = 5 \\ 4v - 5x = 6 \\ 2y + 3z = 6 \\ 3y + 2v = 4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Въ этомъ случаѣ система рѣшается бы-} \\ \text{стрѣе, чѣмъ обыкновенно, такъ какъ въ нѣ-} \\ \text{которыхъ уравненіяхъ сами собой исклю-} \\ \text{чены тѣ или другія неизвѣстныя. Надо} \end{array}$$

только сообразить, какія неизвѣстныя изъ какихъ уравненій слѣдуетъ исключить, чтобы возможно быстрѣе дойти до одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ. Исключая въ нашемъ примѣрѣ z изъ 1-го и 3-го ур. и v изъ 2-го и 4-го, получимъ два уравненія съ x и y :

$$\begin{array}{r} 10x - y + 3z = 5 \\ -2y - 3z = -6 \\ \hline 10x - 3y = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4v - 5x = 6 \\ -4v - 6y = -8 \\ \hline -5x - 6y = -2 \end{array}$$

Рѣшивъ эти уравненія, найдемъ: $x=0$, $y=\frac{1}{3}$.

Теперь вставимъ эти значенія во 2-е и 3-е уравненія:

$$v = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{16}{9}.$$

II. Введеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Иногда система уравненій имѣетъ такой видъ, при которомъ она рѣшается сравнительно просто посредствомъ введенія вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Покажемъ это на слѣдующихъ трехъ примѣрахъ.

Примѣръ 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{7}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \end{array} \right. \quad \text{Положимъ, что} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = x' \\ \frac{1}{y} = y' \\ \frac{1}{z} = z' \end{array} \right.$$

Тогда получимъ систему трехъ уравненій съ вспомогательными неизвѣстными x' , y' и z' :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' + y' - z' = \frac{7}{6} \\ x' - y' - z' = -\frac{5}{6} \\ y' - x' - z' = \frac{1}{6} \end{array} \right. \quad \text{Рѣшивъ эту систему, найдемъ:}$$

$$x' = \frac{1}{2}, \quad y' = 1, \quad z' = \frac{1}{3},$$

$$\text{т. е. } \frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{y} = 1, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{3}.$$

Откуда $x=2$, $y=1$, $z=3$.

Примѣръ 2

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = 13 \\ \frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 5\frac{1}{2} \\ \frac{5}{x} + \frac{7}{y} + \frac{2}{z} = 3\frac{1}{2} \end{cases}$$

Дроби $\frac{3}{x}$, $\frac{2}{y}$ и т. п. можно разсматривать, какъ произведенія $3 \cdot \frac{1}{x}$, $2 \cdot \frac{1}{y}$ и т. д.

Поэтому, положивъ $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ и $\frac{1}{z} = z'$, получимъ:

$$\begin{cases} 3x' + 2y' + 4z' = 13 \\ 6x' + 3y' + z' = 5\frac{1}{2} \\ -5x' + 7y' + 2z' = 3\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Изъ этихъ уравненій находимъ:} \\ x' = 2, y' = \frac{1}{2}, z' = 5, \text{ послѣ чего по-} \\ \text{лучимъ: } x = \frac{1}{2}, y = 2, z = \frac{1}{5}. \end{array}$$

Примѣръ 3.

$$\begin{cases} \frac{1}{2x+3y-5} + \frac{7}{5x-8y+12} = 1. \\ \frac{4}{2x+3y-5} + \frac{14}{5x-8y+12} = 1. \end{cases}$$

Введемъ вспомогательныя неизвѣстныя:

$$\frac{1}{2x+3y-5} = x'; \quad \frac{7}{5x-8y+12} = y'.$$

Тогда получимъ болѣе простую систему:

$$\begin{cases} x' + 7y' = 1 \\ 4x' - 14y' = 1. \end{cases}$$

Рѣшивъ эту систему (напр., способомъ уравненія коэффиціентовъ), найдемъ: $x' = \frac{1}{2}$, $y' = \frac{1}{14}$; слѣдов.:

$$\begin{cases} \frac{1}{2x+3y-5} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5x-8y+12} = \frac{1}{14} \end{cases} \quad \text{Откуда: } \begin{cases} 2x+3y-5=2 \\ 5x-8y+12=14 \end{cases}$$

или $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-8y=2. \end{cases}$ Эта система даетъ: $x=2, y=1.$

III. Сложение и вычитание уравнений. Напримеръ:

$$\begin{cases} x+y=a & \text{Сложивъ всѣ три уравненія, найдемъ сумму трехъ} \\ y+z=b & \text{неизвѣстныхъ; вычитая изъ этой суммы каждое} \\ x+z=c. & \text{уравненіе, найдемъ неизвѣстныя отдѣльно:} \end{cases}$$

$$2(x+y+z)=a+b+c; \quad x+y+z=\frac{a+b+c}{2},$$

$$z=\frac{a+b+c}{2}-a, \quad x=\frac{a+b+c}{2}-b; \quad y=\frac{a+b+c}{2}-c.$$

ГЛАВА VIII.

Понятіе о способѣ неопредѣленныхъ множителей.

(Способъ Безу ¹⁾)

188. Система двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными. Возьмемъ такую систему въ общемъ видѣ.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \quad (1)$$

Умножимъ всѣ члены одного уравненія, напр, второго, на нѣкотораго множителя m и затѣмъ сложимъ его съ другимъ уравненіемъ:

$$(a+a'm)x+(b+b'm)y=c+c'm \quad (2)$$

Желая опредѣлить изъ этого уравненія x , придадимъ множителю m такое значеніе, чтобы коэффициентъ при y обратился въ нуль. Для этого надо для m назначить величину, опредѣляемую уравненіемъ.

$$b+b'm=0, \text{ откуда } m=-\frac{b}{b'}$$

Тогда уравненіе (2) даетъ

$$(a+a'm)x=c+c'm, \text{ откуда } x=\frac{c+c'm}{a+a'm}$$

Вставимъ теперь на мѣсто m его значеніе $-\frac{b}{b'}$;

$$x=\frac{c+c'\left(-\frac{b}{b'}\right)}{a+a'\left(-\frac{b}{b'}\right)}=\frac{c-\frac{c'b}{b'}}{a-\frac{a'b}{b'}}=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}=\frac{cb'-c'b}{ab'-ab'}$$

¹⁾ Французскій математикъ XVIII столѣтія (1730—1783)

Для опредѣленія y дадимъ m такое значеніе, которое въ уравненіи (2) обратитъ въ нуль коэффициентъ при x , т.е. положимъ, что:

$$a + a'm = 0, \text{ откуда } m = -\frac{a}{a'}$$

Тогда

$$(b + b'm)y = c + c'm,$$

$$\text{откуда } y = \frac{c + c'm}{b + b'm} = \frac{c + c' \left(-\frac{a}{a'}\right)}{b + b' \left(-\frac{a}{a'}\right)} = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

134. Система трехъ уравненій съ 3 неизвѣстными.

Пусть имѣемъ систему трехъ уравненій.

$$\begin{cases} a x + b y + c z = d \\ a' x + b' y + c' z = d' \\ a'' x + b'' y + c'' z = d'' \end{cases} \quad (1)$$

Умножимъ всѣ члены одного уравненія, напр., перваго, на неопредѣленнаго множителя m , а всѣ члены другаго уравненія, напр., втораго, на неопредѣленнаго множителя n и затѣмъ сложимъ всѣ три уравненія:

$$(am + a'n + a'')x + (bm + b'n + b'')y + (cm + c'n + c'')z = dm + d'n + d'' \quad (2)$$

Желая опредѣлить x , выберемъ для m и n такія значенія, чтобы въ послѣднемъ уравненіи коэффициенты при y и z обратились въ нули. Такія значенія найдутся, если рѣшимъ систему.

$$\begin{cases} bm + b'n + b'' = 0 \\ cm + c'n + c'' = 0. \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Тогда уравненіе (2) даетъ } x = \frac{dm + d'n + d''}{am + a'n + a''}. \quad (4)$$

Такимъ образомъ, рѣшеніе системы (1) трехъ уравненій съ 3 неизвѣстными приводится къ рѣшенію системы (3) двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными.

Перенеся въ уравненія (3) члены b'' и c'' въ правую часть и пользуясь формулами § 133, получимъ:

$$m = \frac{(-b'')c' - b'(-c'')}{bc' - b'c} = \frac{b'c'' - b''c'}{bc' - b'c},$$

$$n = \frac{b(-c'') - (-b'')c}{bc' - b'c} = \frac{b'c - bc''}{bc' - b'c}$$

Подставивъ эти выраженія въ равенство (4), находимъ:

$$x = \frac{d \frac{b'c'' - b''c'}{bc' - b'c} + d' \frac{b'c - bc''}{bc' - b'c} + d''}{a \cdot \frac{b'c'' - b''c'}{bc' - b'c} + a' \cdot \frac{b'c - bc''}{bc' - b'c} + a''}$$

Раскроемъ скобки и умножимъ числителя и знаменателя на $bc' - b'c$

$$x = \frac{db'c'' - db''c' + d'b'c - d'bc'' + d''bc' - d''b'c}{ab'c'' - ab''c' + a'b'c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c}$$

Остальные неизвестны можно найти темъ же способомъ, а именно для опредѣленія y надо m и n выбрать такими, чтобы:

$$\begin{cases} am + a'n + a'' = 0 \\ cm + c'n + c'' = 0, \end{cases} \text{ тогда } y = \frac{dm + d'n + d''}{bm + b'n + b''}.$$

Для опредѣленія z надо рѣшить систему:

$$\begin{cases} am + a'n + a'' = 0 \\ bm + b'n + b'' = 0, \end{cases} \text{ тогда } z = \frac{dm + d'n + d''}{cm + c'n + c''}.$$

Выполнивъ это, получимъ:

$$y = \frac{da'e' - da''e' + d'a'e - d'ae'' + d''ae' - d''a'e}{ba'c'' - ba''c' + b'a''c - b'ac'' + b''ac' - b''a'c},$$

$$z = \frac{da'b'' - da''b' + d'a''b - d'ad'' + d''ab' - d''a'b}{ca'b'' - ca''b' + c'a''b - c'ab'' + c''ab' - c''a'b}.$$

135. Система n уравненій съ n неизвестными. Пусть вообще имѣемъ систему n уравненій 1-й степени съ n неизвестными. Умножимъ каждыя-нибудь $n-1$ уравненій соответственно на $n-1$ неопредѣленныхъ множителей: $m_1, m_2, m_3 \dots m_{n-1}$ и затѣмъ сложимъ все уравненія. Отъ этого получимъ одно уравненіе съ n неизвестными. Желая затѣмъ опредѣлить какое-нибудь неизвестное, напр. x , приладимъ неопредѣленнымъ множителямъ такія значенія, чтобы коэффициенты при всѣхъ остальныхъ неизвестныхъ обратились въ нули. Для этого придется рѣшить $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвестными. Эту систему, въ свою очередь, можемъ привести къ системѣ $n-2$ уравненій съ $n-2$ неизвестными и т. д.

ГЛАВА IX.

Уравненія неопредѣленныя и несовмѣстныя.

136. Система, въ которой число уравненій равно числу неизвестныхъ. Мы видѣли, что все способы рѣшенія системы уравненій первой степени, когда число уравненій равно числу неизвестныхъ, приводятъ къ рѣшенію одного уравненія первой степени съ однимъ неизвестнымъ. Но такое уравненіе, какъ мы видѣли на примѣрахъ (§ 116), имѣетъ или одно рѣшеніе, или безчисленное множество рѣшеній (примѣръ 4-й указанного параграфа), или ни одного рѣшенія (примѣръ 5-й того же параграфа). Поэтому и система уравненій первой степени, когда число уравненій равно числу неизвест-

ныхъ, допускаетъ или одно рѣшеніе, или безчисленное множество рѣшеній (неопредѣленная система), или не имѣетъ ни одного рѣшенія (невозможная система). Примѣры системъ, допускающихъ единственное рѣшеніе, мы уже имѣли прежде; приведемъ теперь примѣры системъ неопредѣленной и невозможной.

$$\text{Примѣръ 1.} \quad \begin{cases} 2x-3y+z=5 \\ 5x+2y-4z=-1 \\ 9x-4y-2z=9. \end{cases}$$

Въ этой системѣ третье уравненіе есть слѣдствіе двухъ первыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, если члены перваго уравненія умножимъ на 2, потомъ сложимъ его со вторымъ уравненіемъ, то получимъ третье уравненіе; слѣдов., если два первыхъ уравненія удовлетворяются какими-нибудь значеніями неизвѣстныхъ, то тѣми же значеніями удовлетворяется и третье уравненіе. Но первые два уравненія, содержа три неизвѣстныхъ, имѣютъ безчисленное множество рѣшеній; значить, система неопредѣленна.

Если станемъ рѣшать эти уравненія, то неопредѣленность обнаружится тѣмъ, что въ концѣ рѣшенія всѣ неизвѣстныя исключаются и получится равенство: $0=0$.

$$\text{Примѣръ 2.} \quad \begin{cases} 2x-3y=14 \\ 4x-6y=20. \end{cases}$$

Въ этой системѣ второе уравненіе противорѣчитъ первому: если разность $2x-3y$ должна равняться 14, то разность $4x-6y$, равная $2(2x-3y)$, должна равняться $14 \cdot 2$, т. е. 28, а не 20, какъ требуетъ второе уравненіе. Значить, предложенная система невозможна. Если станемъ рѣшать эти уравненія, то невозможность обнаружится тѣмъ, что получимъ нелѣпое равенство. Такія уравненія наз. несовмѣстными.

137. Система, въ которой число уравненій меньше числа неизвѣстныхъ. Такая система или допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, или не имѣетъ ни одного рѣшенія. Пусть, напр., намъ дана система 3 уравненій съ 5 неизвѣстными: x, y, z, t и v . Назначимъ для 2 неизвѣстныхъ, напр., для x и y , произвольныя числа и подставимъ ихъ въ данныя уравненія; тогда получимъ систему 3 уравненій съ тремя неиз-

вѣстными z , t и v ; рѣшивъ эту систему (если она окажется возможною и опредѣленною), найдемъ значенія этихъ неизвѣстныхъ, соотвѣтствующія числамъ, взятымъ для x и y . Назначивъ какія-нибудь другія числа для x и y , снова найдемъ соотвѣтствующія значенія для остальныхъ неизвѣстныхъ. Такимъ образомъ, каждой парѣ произвольно выбранныхъ чиселъ для x и y найдемъ соотвѣтствующія значенія остальныхъ трехъ неизвѣстныхъ; значитъ, всѣхъ рѣшеній можетъ быть безчисленное множество.

Можетъ случиться, что уравненія системы окажутся несомвѣстными; тогда система не имѣетъ ни одного рѣшенія.

138. Система, въ которой число уравненій больше числа неизвѣстныхъ. Такая система можетъ имѣть рѣшеніе лишь при нѣкоторыхъ соотношеніяхъ между коэффициентами уравненій. Положимъ, напр., мы имѣемъ систему 7 ур. съ 4 неизвѣстными. Возьмемъ изъ всѣхъ уравненій какія-нибудь 4 и рѣшимъ ихъ (если возможно); тогда мы найдемъ значенія для всѣхъ 4 неизвѣстныхъ. Подставимъ эти значенія въ остальные 3 уравненія; мы получимъ тогда 3 равенства, которыя могутъ оказаться невозможными. Въ этомъ случаѣ данныя уравненія не совмѣстны.

Примѣры.

$$1) \begin{cases} 4x-2y=8 \\ 7x+4y=59 \\ 6x-3y=10 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Рѣшивъ два первыхъ уравненія, найдемъ:} \\ x=5, y=6. \text{ Вставивъ эти значенія въ 3-е} \\ \text{уравненіе, получимъ невозможное равенство:} \\ 12=10; \end{array}$$

значитъ, данныя уравненія несомвѣстны.

$$2) \begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \\ qx+ry=s \end{cases} \begin{array}{l} \text{Изъ двухъ первыхъ уравненій находимъ:} \\ x=\frac{cn-bp}{an-bm}, \quad y=\frac{ap-cm}{an-bm}. \end{array}$$

Вставимъ эти выраженія въ третье уравненіе; тогда получимъ слѣдующую зависимость между коэффициентами:

$$\frac{cn-bp}{an-bm} q + \frac{ap-cm}{an-bm} r = s.$$

Если коэффициенты таковы, что удовлетворяютъ этой зависимости, то система возможна; въ противномъ случаѣ уравненія несомвѣстны.

Г Л А В А X.

Исслѣдованіе уравненій первой степени.

I. Одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

139. Что значитъ исслѣдовать уравненіе.

Исслѣдовать уравненіе съ буквенными коэффициентами значитъ рассмотреть всѣ особенные случаи, которые могутъ представиться при рѣшеніи его въ зависимости отъ частныхъ значеній буквъ, и уяснить значеніе этихъ случаевъ для той задачи, изъ условій которой уравненіе выведено.

140. Общій видъ уравненія и его рѣшеніе.

Мы видѣли (§ 116), что уравненіе первой степени съ 1 неизвѣстнымъ x послѣ надлежащихъ преобразованій приводится къ такому нормальному виду, при которомъ каждая часть уравненія состоитъ только изъ одного члена, а именно: лѣвая часть состоитъ изъ члена, содержащаго x въ первой степени, а правая часть—изъ члена, не содержащаго x . Обозначимъ коэффициентъ при x въ лѣвой части уравненія буквою a и членъ правой части уравненія буквою b ; тогда нормальный видъ уравненія 1-й степени съ 1 неизвѣстнымъ будетъ такой:

$$ax = b.$$

гдѣ a и b суть какія-нибудь алгебраическія числа, не зависящія отъ x . Раздѣливъ обѣ части этого уравненія на коэффициентъ a , мы получимъ слѣдующее единственное рѣшеніе уравненія:

$$x = \frac{b}{a}.$$

Разсмотримъ теперь, какого рода рѣшенія получаются изъ этой общей формулы при частныхъ значеніяхъ входящихъ въ нее буквъ.

141. Положительное рѣшеніе. Такое рѣшеніе получается тогда, когда числа b и a одинаковыхъ знаковъ, т.-е. оба они положительныя, или оба отрицательныя.

Положительное рѣшеніе вообще показываетъ, что предложенная задача возможна.

Впрочемъ, иногда случается, что не всѣ условія задачи выражены въ уравненіи; въ этомъ случаѣ положительное рѣшеніе можетъ и не удовлетворять требованіямъ задачи, и задача окажется невозможной. Приведемъ этому примѣръ.

Задача. Общество, состоящее изъ 20 человѣкъ, устроило сборъ съ благотворительной цѣлью, при чемъ каждый мужчина внесъ по 3 рубля, а каждая женщина—по 1 руб. Сколько было въ этомъ обществѣ мужчинъ и сколько женщинъ, если весь сборъ составилъ 55 руб.?

Искомое число мужчинъ x ; число женщинъ $20-x$; сборъ со всѣхъ мужчинъ $3x$, съ женщинъ $20-x$; по условію задачи:

$$3x + (20-x) = 55; \text{ откуда: } x = 17\frac{1}{2}.$$

Это рѣшеніе удовлетворяетъ уравненію, но не удовлетворяетъ задачѣ, такъ какъ по смыслу ея искомое число должно быть цѣлымъ. Различіе между уравненіемъ и задачей произошло здѣсь оттого, что уравненіе выражаетъ не всѣ требованія задачи, а именно: въ немъ не содержится подразумѣваемаго въ задачѣ требованія, чтобы искомое число было цѣлымъ. Предложенная задача невозможна.

142. Отрицательное рѣшеніе. Такое рѣшеніе получается тогда, когда числа b и a противоположныхъ знаковъ, т.-е. одно изъ нихъ положительное, а другое отрицательное.

Отрицательное рѣшеніе, удовлетворяя уравненію, въ то же время удовлетворяетъ и задачѣ, если величина, выражаемая числомъ x , можетъ быть понимаема въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Въ такомъ случаѣ отрицательное рѣшеніе означаетъ, что эту величину надо брать въ смыслѣ, противоположномъ тому, въ какомъ она берется при положительномъ рѣшеніи; такъ, если положительное рѣшеніе означаетъ время послѣ цѣкаго событія, то отрицательное рѣшеніе означаетъ время раньше этого событія; если первое означаетъ разстояніе вправо, то послѣднее—разстояніе влево отъ цѣкаго точки, и т. п.

Если же величина, выражаемая числом x , не может быть принята в двух противоположных смыслах, то отрицательное решение означает невозможность задачи.

Задача 1. Отцу 40 лѣтъ, а сыну 10 лѣтъ. Через сколько лѣтъ отецъ будетъ въ 7 разъ старше сына?

Обозначимъ искомое число черезъ x . Черезъ x лѣтъ отцу будетъ $40+x$, а сыну $10+x$ лѣтъ. По условію:

$$40+x=(10+x)7; \text{ откуда; } x=-5.$$

Если вопросъ задачи: «черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ 7 разъ старше сына?» понимать буквально, то получившееся отрицательное решение надо истолковать такъ: невозможно, чтобы въ будущемъ отецъ когда-либо сдѣлался въ 7 разъ старше сына. Но допустимъ, что, задавая вопросъ задачи, мы имѣли цѣлью опредѣлить то время (тотъ моментъ времени), когда отецъ въ 7 разъ старше сына, независимо отъ того, произойдетъ ли это событіе въ будущемъ, или оно уже произошло въ прошедшемъ. Тогда при рѣшеніи задачи мы должны сдѣлать 2 предположенія:

1) Положимъ, что отецъ будетъ старше сына въ 7 разъ черезъ x лѣтъ; тогда уравненіе окажется то, которое мы выше составили:

$$40+x=(10+x)7. \quad (1)$$

2) Положимъ, что отецъ былъ старше сына въ 7 разъ x лѣтъ тому назадъ; тогда уравненіе окажется другое:

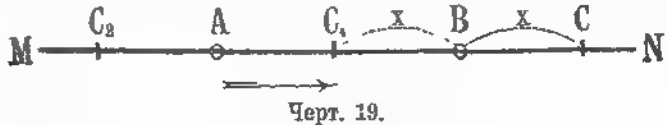
$$40-x=(10-x)7. \quad (2)$$

Не трудно видѣть, что уравненіе (2) можно получить изъ ур. (1), если въ (1) замѣнимъ x на $-x$. Значитъ, можно сказать, что уравненіе (1) соответствуетъ обоимъ предположеніямъ, если только условимся, что положительное значеніе x означаетъ промежутокъ времени, слѣдующій за настоящимъ моментомъ, а отрицательное значеніе означаетъ промежутокъ времени, предшествующій настоящему моменту. Тогда, получивъ отрицательное рѣшеніе уравненія (1), именно $x=-5$, мы должны

сказать, что отецъ былъ въ 7 разъ старше сына 5 лѣтъ тому назадъ.

Задача 2. Два курьера ѣдутъ въ направленіи отъ *M* къ *N* (черт. 19); въ каждый часъ одинъ курьеръ проѣзжаетъ 15 верстъ, другой 12 верстъ. Перваго замѣтили на станціи *A* въ 12 часовъ дня, а второго видѣли въ 2 часа того же дня на станціи *B*, отстоящей отъ *A* на 25 верстъ. Определить мѣсто, гдѣ одинъ курьеръ догонитъ другого.

Изъ условій задачи прямо не видно, гдѣ расположено такое мѣсто: направо отъ *B* или нѣлѣво отъ этой точки. Предположимъ, что курьеры сошлись направо отъ *B*, въ нѣкоторой точкѣ *C*,



отстоящей отъ *B* на x верстъ. Первому курьеру отъ *A* до *C* пришлось проѣхать $25 + x$ верстъ, на что ему понадобилось $\frac{25+x}{15}$ часовъ. Второму курьеру отъ *B* до *C* пришлось проѣхать

x верстъ, на что ему понадобилось $\frac{x}{12}$ часовъ. Изъ условій задачи

видно, что число часовъ, въ теченіе которыхъ первый курьеръ проѣхалъ отъ *A* до *C*, больше числа часовъ, употребленныхъ вторымъ курьеромъ на проѣздъ отъ *B* до *C*, на 2; поэтому:

$$\frac{25+x}{15} - \frac{x}{12} = 2. \quad (1)$$

Такимъ окажется уравненіе въ томъ случаѣ, если курьеры сошлись, какъ мы предположили, направо отъ *B*. Посмотримъ, каково будетъ уравненіе, если курьеры сошлись въ нѣкоторой точкѣ *C*₁, лежащей нѣлѣво отъ *B*, на разстояніи x верстъ отъ *B*. Тогда первый курьеръ проѣхалъ пространство отъ *A* до *C*₁,

т.-е. $25 - x$ верстъ, въ $\frac{25-x}{15}$ часовъ; значитъ, столько часовъ

прошло отъ момента, когда 1-й курьеръ былъ на станціи *A*,

до того момента, когда онъ догналъ 2-го курьера, 2-й курьеръ проѣхалъ путь отъ C_1 до B , равный x верстѣ, въ $\frac{x}{12}$ часовъ; значитъ, столько часовъ прошло отъ момента встрѣчи курьеровъ, до того момента, когда 2-й прибылъ на станцію B : Но, по условію, 1-й курьеръ выѣхалъ со станціи A въ полдень, а 2-й курьеръ прибылъ на станцію B въ 2 часа дня (а въ промежуткѣ между этими моментами была ихъ встрѣча); значитъ, сумма двухъ времени:

$$\frac{25-x}{15} \text{ час. и } \frac{x}{12} \text{ час.}$$

должна составить ровно 2 часа:

$$\frac{25-x}{15} + \frac{x}{12} = 2. \quad (2)$$

Легко замѣтить, что уравненіе (2) можно получить изъ ур. (1), если въ послѣднемъ x замѣнимъ на $-x$. Дѣйствительно, такая замѣна даетъ:

$$\frac{25+(-x)}{15} - \frac{-x}{12} = 2, \text{ или } \frac{25-x}{15} - \left(-\frac{x}{12}\right) = 2, \text{ т.-е. } \frac{25-x}{15} + \frac{x}{12} = 2,$$

а это и есть уравненіе (2).

Замѣтивъ это, мы можемъ сказать, что уравненіе (1) включаетъ въ себѣ и уравненіе (2), если только допустимъ, что буква x въ ур. (1) можетъ означать не только положительное число, но и отрицательное. Тогда уравненіе (1) одинаково соответствуетъ какъ тому предположенію, что курьеры сошлись направо отъ B , такъ и тому, что они сошлись налево отъ B . Какое изъ этихъ двухъ предположеній имѣетъ въ дѣйствительности мѣсто, мы увидимъ, рѣшивъ ур. (1): если получимъ положительное рѣшеніе, то будетъ вѣрно первое предположеніе, если получимъ отрицательное рѣшеніе, то будетъ вѣрно второе предположеніе.

Рѣшимъ уравненіе (1):

$$\frac{\overset{4}{25+x}}{15} - \frac{\overset{5}{x}}{12} = 2; \quad 100+4x-5x=120; \quad -x=20; \quad x=-20.$$

Значитъ, курьеры сошлись па дѣво отъ B въ точкѣ C_1 , отстоящей отъ B на 20 верстъ.

Задача 3. Въ двухъ кошелькахъ было 100 руб. Вынувъ изъ одного $\frac{1}{2}$, а изъ другого $\frac{1}{3}$ денегъ, находившихся въ нихъ, замѣтили, что въ обоихъ кошелькахъ вмѣстѣ осталось 70 руб. Сколько было денегъ въ каждомъ кошелькѣ?

Въ одномъ кошелькѣ денегъ x руб.; въ другомъ $100-x$ руб. Когда изъ перваго вынули $\frac{1}{2}$ его денегъ, то въ немъ осталось $\frac{1}{2}x$, когда изъ втораго вынули $\frac{1}{3}$ его денегъ, то въ немъ осталось $\frac{2}{3}(100-x)$; по условію

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}(100-x) = 70.$$

Рѣшимъ это уравненіе:

$$3x + 400 - 4x = 420; \text{ отсюда: } -x = 20; x = -20.$$

Такъ какъ стоимость денегъ въ кошелькѣ можетъ быть только положительной (или нулемъ), то получившееся отрицательное рѣшеніе означаетъ невозможность задачи.

148. Нулевое рѣшеніе. Если въ формулѣ $x = \frac{b}{a}$ число b сдѣлается равнымъ нулю, при чемъ a не будетъ равно нулю, то x приметъ видъ частнаго $\frac{0}{a}$, которое, по опредѣленію дѣленія, должно равняться нулю. И дѣйствительно, тогда уравненіе $ax = b$ не можетъ имѣть никакого иного корня, кромѣ $x=0$, такъ какъ при $b=0$ оно обращается въ равенство $ax=0$, которое, при a , не равномъ нулю, возможно только, когда $x=0$. Нулевое рѣшеніе вообще даетъ отвѣтъ на вопросъ задачи.

Задача. Отцу 40 лѣтъ, сыну 10. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ 4 раза старше сына?

Обозначивъ искомое число буквой x , получимъ:

$$40 + x = (10 + x)4,$$

откуда:

$$3x = 0, \quad x = \frac{0}{3} = 0.$$

Это рѣшеніе дастъ отвѣтъ на вопросъ задачи: «въ настоящее время отецъ въ 4 раза старше сына».

144. Безконечное рѣшеніе. Если въ формулѣ $x = \frac{b}{a}$

число a обратится въ нуль, то x представится подъ видомъ частнаго $\frac{b}{0}$; если при этомъ число b не есть 0, то для x нельзя получить никакого числа (§ 39, 3^о). Въ этомъ случаѣ уравненіе $ax = b$ принимаетъ видъ равенства $0 \cdot x = b$, которое не удовлетворяется никакимъ числомъ, такъ какъ, какое бы число мы для x ни взяли, произведеніе $0 \cdot x$ всегда равно 0, тогда какъ число b , по условію, не равно 0.

Невозможность удовлетворить уравненію никакимъ числомъ, конечно, означаетъ и невозможность задачи, изъ условій которой выведено это уравненіе.

Однако недостаточно сказать, что задача въ этомъ случаѣ невозможна; можно еще указать одно важное обстоятельство, которое мы сейчасъ объяснимъ.

Зададимся вопросомъ: какія значенія будетъ получать неизвѣстное, если станемъ измѣнять условія задачи такъ, чтобы знаменатель дроби, выведенной для x , не равнялся нулю, а только уменьшался бы по абсолютной величинѣ, приближаясь къ нулю? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, рассмотримъ, какъ будетъ измѣняться величина дроби, если абсолютную величину ея знаменателя станемъ приближать къ нулю, а числителя оставимъ безъ перемѣны.*

Положимъ, что въ какой-нибудь дроби $\frac{p}{q}$ абсолютная величина знаменателя принимаетъ все меньшія и меньшія значенія, на-примѣръ, такія: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и т. д. Тогда абсолютная величина дроби получаетъ такія значенія (если черезъ p' обозначимъ абсолютную величину p):

$$\frac{p'}{\frac{1}{10}} = 10p'; \quad \frac{p'}{\frac{1}{100}} = 100p'; \quad \frac{p'}{\frac{1}{1000}} = 1000p'; \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда видно, что если p' есть число постоянное, не равное

нулю (хотя бы и очень малое), то абсолютная величина дроби $\frac{p}{q}$, при неограниченном уменьшеніи ея знаменателя, все возрастает и может превзойти какое угодно большое число.

Это свойство дроби обыкновенно выражают такъ: дробь, у которой знаменатель равенъ 0, а числитель не равенъ 0, равна безконечности.

Фразу эту нельзя понимать буквально, такъ какъ дробь перестаетъ существовать, когда у нея знаменатель обратится въ 0; фраза выражаетъ только то, что если абсолютная величина знаменателя дроби уменьшается, приближаясь какъ угодно близко къ нулю, а числитель есть постоянное число, не равное нулю, то абсолютная величина дроби безпредѣльно увеличивается.

Свойство это письменно выражаютъ такъ:

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

гдѣ знакъ ∞ обозначаетъ собою «безконечность».

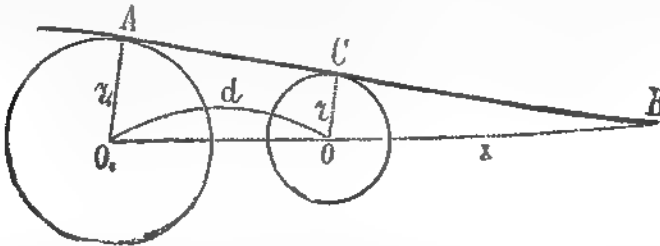
Теперь мы можемъ сказать, что когда въ уравненіи $ax = b$ коэффициентъ a обращается въ 0, причемъ число b не равно 0, то уравненіе получаетъ «безконечное рѣшеніе» (∞); оно означаетъ не только то, что задача невозможна, но вмѣстѣ съ тѣмъ и показываетъ, что, по мѣрѣ приближенія къ нулю знаменателя дроби, выведенной для x , абсолютная величина x безпредѣльно увеличивается.

Замѣчаніе 1. Если знаменатель, приближаясь къ нулю, имѣетъ одинаковый знакъ съ числителемъ, то дробь, увеличиваясь безпредѣльно, все время остается положительной; если же знаменатель, приближаясь къ нулю, имѣетъ знакъ, противоположный знаку числителя, то дробь все время отрицательна, а абсолютная величина ея увеличивается безпредѣльно. Письменно это выражаютъ такъ:

$$\frac{a}{0} = \pm \infty.$$

Замѣчаніе 2. Изъ свойства дроби находимъ также, что $\frac{\square}{\pm\infty} = 0$, т.-е. если абсолютная величина знаменателя возрастаетъ безпредѣльно, а числитель остается постояннымъ, то дробь приближается какъ угодно близко къ нулю.

Задача. Къ двумъ окружностямъ (черт. 20), у которыхъ радіусы суть r и r_1 и разстояніе между центрами d , проведена общая внѣшняя касательная AB . Определить точку пересѣченія касательной съ линіей центровъ.



Черт. 20.

Обозначимъ черезъ x разстояніе точки пересѣченія до центра ближайшаго круга. Проведя изъ центровъ радіусы къ точкамъ касанія, получимъ два подобныхъ прямоугольныхъ треугольника OBC и O_1AB , изъ которыхъ имѣемъ:

$$x : (d+x) = r : r_1; \quad r_1x = dr + rx;$$

$$r_1x - rx = dr; \quad x = \frac{dr}{r_1 - r}.$$

Если предположимъ, что разность радіусовъ данныхъ круговъ уменьшается, приближаясь къ нулю, то дробь $\frac{dr}{r_1 - r}$ будетъ безпредѣльно увеличиваться, т.-е. точка пересѣченія будетъ неограниченно удаляться отъ центра ближайшаго круга, и общая касательная AB будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ параллельности съ линіей центровъ; когда r_1 сдѣлается вполнѣ равнымъ r , тогда разность $r_1 - r$ обратится въ нуль и для x получится «безконечное» значеніе; въ этомъ случаѣ точки пересѣченія совѣшь не будутъ, такъ какъ общая касательная окажется параллельной линіи центровъ.

145. Неопредѣленное дрѣшеніе. Если въ формулѣ $x = \frac{b}{a}$ каждое изъ чиселъ a и b сдѣлается равнымъ нулю,

то x представится подѣ видомъ частнаго $\frac{0}{0}$. Это частное, по опредѣленію дѣленія, равняется какому угодно числу (§ 39, 2^о); поэтому выраженіе $\frac{0}{0}$ наз. н е о п р е д ѣ л е н н ы м ъ. И дѣйствительно, уравненіе $ax = b$ въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ равенства $0 \cdot x = 0$, которое остается вѣрнымъ при всякомъ значеніи x .

Итакъ, рѣшеніе $a = \frac{0}{0}$ служитъ признакомъ, что уравненіе и задача неопредѣленны, т.-е. допускаютъ безчисленное множество рѣшеній.

Задача. Отцу 40 лѣтъ, сыну 10. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ на 30 лѣтъ старше сына?

$$40 + x = 10 + x + 30; 40 + x = 40 + x.$$

Обѣ части уравненія тождественны, и поэтому x можетъ имѣть произвольныя значенія, т.-е. задача неопредѣленна. Рѣшая это уравненіе по общему приему, получаемъ:

$$x - x = 40 - 40; x(1 - 1) = 0; 0 \cdot x = 0; x = \frac{0}{0}.$$

146. Кажущаяся неопредѣленность. Выраженіе $\frac{0}{0}$ иногда получается оттого, что числитель и знаменатель дроби не сокращены на нѣкотораго множителя, который обращается въ нуль при частныхъ значеніяхъ буквъ. Пусть, напр., мы вывели, что нѣкоторая величина y опредѣляется въ зависимости отъ другой величины x слѣдующей формулой:

$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} \quad (1)$$

Дробь, стоящая въ правой части этой формулы, сокращается на $x - 3$, если только $x \neq 3$ (такъ какъ при $x = 3$ разность $x - 3$

обращается въ 0, а на 0 дѣлится невозможно). Слѣд., мы можемъ сказать, что при всѣхъ значеніяхъ x , не равныхъ 3, величина y опредѣляется болѣе простою формулою:

$$y = x + 3 \quad (2)$$

такъ какъ при такихъ значеніяхъ x равенство (2) вполне тождественно равенству (1). Но при $x=3$ эти два равенства не тождественны: данное равенство (1) принимаетъ неопредѣленный видъ: $y = \frac{0}{0}$, тогда какъ равенство (2) даетъ опредѣленное

число: $y=6$. Значитъ, формула (1) опредѣляетъ величину y не для всѣхъ численныхъ значеній x , а только для такихъ, которыя больше или меньше 3. Чтобы опредѣлить величину y и для значенія $x=3$, надо къ формулѣ (1) добавить еще какое-нибудь дополнительное условіе. Каково это условіе, это зависитъ отъ особенностей того вопроса, при рѣшеніи котораго мы вывели формулу (1). Напр., быть можетъ, вопросъ требуетъ, чтобы величина y опредѣлялась такъ:

$$\text{если } x \neq 3, \text{ то } y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3,$$

$$\text{а если } x = 3, \text{ то } y = 0$$

(последнее условіе и есть дополнительное).

Если никакого особаго дополнительнаго условія не высказано, то обыкновенно подразумѣвается, чтобы и при $x=3$ (мы говоримъ о нашемъ примѣрѣ) величина y выражалась тою же сокращенной формулою (2), которою она выражается при всѣхъ значеніяхъ x , не равныхъ 3, т.-е. тою формулою, которая получается изъ данной дроби (1) послѣ ея сокращенія на множителя $x-3$ (эта формула при $x=3$ даетъ $y=6$)¹⁾.

¹⁾ Очень часто дополнительное условіе состоитъ въ томъ, чтобы при томъ значеніи $x=a$, при которомъ дробь, выражающая величину y , принимаетъ неопредѣленный видъ, эта величина равнялась предѣлу, къ которому дробь стремится, когда x неограниченно приближается къ a . Вообще говоря, этотъ предѣлъ и есть то значеніе, которое при $x=a$ принимаетъ дробь послѣ сокращенія на множителя $x-a$. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ этотъ предѣлъ есть 6.

Если дополнительное условие подразумевается именно такое, то въ такомъ случаѣ говорятъ, что полученное выражение $\frac{0}{0}$ представляеть кажущуюся неопредѣленность, и за истинное значеніе дроби принимаютъ то опредѣленное ея значеніе, которое получается послѣ сокращенія дроби на множителя, обращающагося въ нуль. Найти такое значеніе значить, какъ принято говорить, раскрыть истинный смыслъ даннаго неопредѣленнаго выраженія.

147. Результаты изслѣдованія. Для ясности выпишемъ всѣ результаты, найденные нами при изслѣдованіи, въ слѣдующей таблицѣ:

Уравненіе: $ax=b$;		формула рѣшенія: $x=\frac{b}{a}$.	
$a \neq 0$		$a=0$	
1) Положительное рѣшеніе (b и a одинаковыхъ знаковъ).	4) Ни одного рѣшенія (рѣшеніе безконечное $x=\frac{b}{0}=\pm\infty$).		
2) Отрицательное рѣшеніе (b и a разныхъ знаковъ).	5) Безконечное множество рѣшеній (неопредѣленное рѣшеніе $x=\frac{0}{0}$).		
3) Нулевое рѣшеніе ($b=0$).			

148. Задача о курьерахъ. Въ заключеніе этой статьи приведемъ изслѣдованіе задачи о курьерахъ, въ которой вторично прослѣдимъ значеніе всѣхъ случаевъ рѣшенія, рассмотрѣнныхъ выше. Эта задача въ численномъ видѣ была рѣшена раньше (§ 142, зад. 2-я). Предложимъ теперь ее въ общемъ видѣ (см. чертежъ на страл. 150).

Два курьера ѣдутъ въ направленіи отъ M къ N ; одинъ курьеръ въ каждый часъ проезжаетъ v верстъ, другой v_1 верстъ. Последняго видѣли на станціи B спустя h часовъ послѣ того, какъ перваго замѣтили на станціи A , отстоящей отъ B на d верстъ.

Опредѣлить мѣсто, гдѣ одинъ курьеръ догонитъ другого (буквы v , v_1 , h и d суть ариеметическія числа).

Такое мѣсто могло находиться или направо отъ B , или налѣво отъ B (при чемъ въ послѣднемъ случаѣ оно могло лежать или между A и B , или налѣво отъ A). Предположимъ первое и обозначимъ черезъ x разстояніе отъ точки встрѣчи C до станціи B . Курьеру, ѣдущему со скоростью v верстъ, пришлось отъ A до C проѣхать $d+x$ верстъ, на что ему потребовалось $\frac{d+x}{v}$ часовъ. Курьеру, ѣдущему со скоростью v_1 , пришлось отъ B до C проѣхать x верстъ, на что ему потребовалось $\frac{x}{v_1}$ часовъ. Изъ условій задачи видно, что

$$\frac{d+x}{v} - \frac{x}{v_1} = h. \quad (1)$$

Предположимъ теперь, что курьеры сошлись въ нѣкоторой точкѣ C_1 , лежащей между A и B на разстояніи x верстъ отъ B . Тогда первый курьеръ отъ A до C_1 проѣхалъ $d-x$ верстъ въ $\frac{d-x}{v}$ часовъ, второй курьеръ отъ C_1 до B проѣхалъ x верстъ въ $\frac{x}{v_1}$ часовъ; изъ условій задачи видно что сумма этихъ временъ; должна равняться h (см. объясненіе въ § 142, задача 2):

$$\frac{d-x}{v} + \frac{x}{v_1} = h. \quad (2)$$

Наконецъ, допустимъ, что курьеры сошлись въ точкѣ C_2 , лежащей налѣво отъ B на разстояніи x , превосходящемъ разстояніе AB , т.-с. число d . Тогда первый курьеръ отъ C_2 до A проѣхалъ $x-d$ верстъ въ $\frac{x-d}{v}$ часовъ, а второй отъ C_2 до B проѣхалъ x вер.

въ $\frac{x}{v_1}$ часовъ; изъ условій задачи видно, что $\frac{x}{v_1}$ должно быть болѣе $\frac{x-d}{v}$ на h , т.-с.

$$\frac{x}{v_1} - \frac{x-d}{v} = h. \quad (3)$$

Сравнивая полученныя три уравненія, мы прежде всего замѣчаемъ, что уравненіе (3) одинаково съ уравненіемъ (2), такъ какъ его можно преобразовать такимъ образомъ:

$$\frac{x}{v_1} - \frac{-(d-x)}{v} = h; \quad \frac{x}{v_1} - \left(-\frac{d-x}{v}\right) = h; \quad \frac{x}{v_1} + \frac{d-x}{v} = h;$$

а въ этомъ видѣ оно отличается отъ уравненія (2) только порядкомъ слагаемыхъ въ лѣвой части. Далѣе мы замѣчаемъ, что изъ уравненія (1) можно получить уравненіе (2) [слѣд., и уравненіе (3)], если въ немъ замѣнимъ x на $-x$. Поэтому мы можемъ сказать, что уравненіе (1) включаетъ въ себѣ и уравненія (2) и (3), если только допустимъ, что буква x въ этомъ уравненіи можетъ быть числомъ и положительнымъ, и отрицательнымъ. Если, рѣшивъ уравненіе (1), мы получимъ положительное число, то это будетъ значить, что курьеры сошлись направо отъ B , если же получимъ отрицательное рѣшеніе, то это покажетъ намъ, что курьеры сошлись лѣво отъ B , при чемъ точка ихъ соединенія окажется лежащей или между A и B , или лѣво отъ A , смотря по тому, какъ велика абсолютная величина x : меньше ли d , или больше d .

Рѣшимъ уравненіе (1):

$$dv_1 + v_1x - vx = hvv_1; \quad (v_1 - v)x = hvv_1 - dv_1;$$

$$x = \frac{hvv_1 - dv_1}{v_1 - v} = \frac{v_1(vh - d)}{v_1 - v}.$$

Разсмотримъ теперь всѣ различные случаи, которые могутъ представиться при различныхъ численныхъ значеніяхъ буквъ v , v_1 , h и d .

1. Положительное рѣшеніе будетъ тогда, когда $vh > d$ и $v_1 > v$, или тогда, когда $vh < d$ и $v_1 < v$. Оно означаетъ, что курьеры сошлись направо отъ B . Что это дѣйствительно такъ, видно изъ слѣдующихъ соображеній. Произведеніе vh означаетъ пространство, которое проѣхалъ первый курьеръ въ h часовъ; значить, оно показываетъ, на какое разстояніе

этотъ курьеръ удалится отъ станціи A до того момента, когда второй курьеръ былъ замѣченъ въ B . Если $vh > d$, то изъ этого выводимъ, что, когда второй курьеръ былъ въ B , первый уже проѣхалъ эту станцію, и такъ какъ при этомъ $v_1 > v$, то очевидно, что второй курьеръ догонитъ перваго гдѣ-нибудь за станціей B , а не раньше. Точно такъ же если $vh < d$, то это значить, что когда второй курьеръ пріѣхалъ въ B , первый еще не доѣхалъ до этой станціи, и такъ какъ при этомъ $v_1 < v$, то очевидно, что первый курьеръ догонитъ втораго гдѣ-нибудь направо отъ B , а не раньше.

2. Отрицательное рѣшеніе будетъ тогда, когда $vh > d$, но $v_1 < v$, или же тогда, когда $vh < d$, но $v_1 > v$. Это рѣшеніе показываетъ, что курьеры сошлись налѣво отъ станціи B (между A и B , если абсолютная величина x меньше d , и налѣво отъ A , если абсолютная величина x больше d). И дѣйствительно, при допущенныхъ условіяхъ курьеры должны были сойтись налѣво отъ B , какъ это видно изъ слѣдующихъ соображеній. Если $vh > d$, то второй курьеръ находился въ B тогда, когда первый уже проѣхалъ эту станцію, и такъ какъ при этомъ $v_1 < v$, то второй курьеръ не можетъ догнать перваго за станціей B , а сошелся съ нимъ гдѣ-нибудь раньше. Также если $vh < d$, то второй курьеръ былъ въ B , когда первый еще не доѣхалъ до B , и такъ какъ при этомъ $v_1 > v$, то очевидно, что встрѣча произошла налѣво отъ B .

3. Нулевое рѣшеніе получится, когда $vh = d$, но $v_1 \leq v$. Въ этомъ случаѣ курьеры сошлись на станціи B .

4. Безконечное рѣшеніе получится, если $vh \leq d$, а $v_1 = v$. Въ этомъ случаѣ курьеры не могли догнать одинъ другаго, потому что оба они ѣдутъ съ одинаковой скоростью, а когда второй изъ нихъ былъ въ B , первый или не доѣхалъ до этой станціи, или уже проѣхалъ ее.

Безконечное рѣшеніе еще означаетъ, что если v неограниченно приближается къ равенству съ v_1 , то мѣсто соединенія безпре-
дѣльно удаляется отъ B .

5. Неопредѣленное рѣшеніе получится, если $vh = d$ и $v_1 = v$. Въ этомъ случаѣ каждую точку пути можно считать за точку соединенія, такъ какъ курьеры все время ѣдутъ вмѣстѣ;

другими словами, задача при этих предположеніях становится неопредѣленной.

2. Система двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

149. Общія формулы. Мы видѣли (§ 117), что уравненіе 1-й степени съ 2 неизвѣстными послѣ надлежащихъ преобразованій можетъ быть приведено къ такому нормальному виду, при которомъ въ лѣвой части уравненія находятся только 2 члена: одинъ съ неизвѣстнымъ x (въ первой степени) и другой съ неизвѣстнымъ y (въ первой степени), правая же часть уравненія состоитъ изъ одного члена, не содержащаго неизвѣстныхъ. Обозначивъ коэффициенты при x и y соответственно буквами a и b и членъ, не содержащій неизвѣстныхъ, буквою c , мы можемъ нормальный видъ уравненія 1-й степени съ 2-мя неизвѣстными представить такъ:

$$ax + by = c,$$

гдѣ a , b и c означаютъ какія-нибудь алгебраическія числа. Поэтому систему 2-хъ уравненій 1-й степени съ 2 неизвѣстными мы можемъ въ общемъ видѣ изобразить такъ:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c. \end{cases}$$

Рѣшимъ эту систему однимъ изъ способовъ, указанныхъ раньше. Примѣнимъ, напр., способъ сложенія или вычитанія.

Умноживъ члены перваго уравненія на b' , а члены втораго на b , вычтемъ второе уравненіе изъ перваго:

$$\begin{array}{r} ab'x + bb'y = cb' \\ -a'bx - bb'y = -c'b \\ \hline (ab' - a'b)x = cb' - c'b \end{array} \quad x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}.$$

Умноживъ члены перваго уравненія на a' , а втораго на a , вычтемъ уравненія почленно:

$$\begin{array}{r} aa'x + ba'y = ca' \\ -aa'x - b'ay = -c'a \\ \hline (ba' - b'a)y = ca' - c'a \end{array} \quad y = \frac{ca' - c'a}{ba' - b'a}.$$

Знаменателей обѣихъ формулъ можно сдѣлать одинаковыми, если оба члена дроби, полученной для y , умножимъ на -1 ; тогда получимъ слѣдующія общія формулы:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

150. Способъ составленія общихъ формулъ.

Полезно запомнить, какъ можно составить формулы для неизвѣстныхъ, не прибѣгая каждый разъ къ ихъ выводу. Знаменатель $ab' - a'b$, одинаковый для обѣихъ формулъ, составленъ изъ коэффициентовъ:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \diagdown & \diagup \\ & b' \\ \diagup & \diagdown \\ a' & \end{array}$$

перемноженіемъ ихъ крестъ-накрестъ, при чемъ одно произведеніе взято съ $+$, другое съ $-$. Числители формулъ получаются изъ знаменателя замѣною въ немъ коэффициентовъ опредѣляемаго неизвѣстнаго соответственно свободными членами c и c' . Чтобы получить, напр., числителя формулы x , надо въ знаменателѣ $ab' - a'b$ замѣнить a и a' коэффициенты a и a' соответственно на c и c' ; отъ этого получимъ: $cb' - c'b$.

151. Исслѣдованіе. Рассмотрим особо слѣдующіе 2 случая:

I. Общей знаменатель $ab' - a'b$ не равенъ нулю. Въ этомъ случаѣ для каждаго неизвѣстнаго получается единственное рѣшеніе, которое можетъ быть положительнымъ, отрицательнымъ и равнымъ нулю. О значеніи этихъ рѣшеній здѣсь можетъ быть сказано то же самое, что говорилось при изслѣдованіи одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

II. Общей знаменатель $ab' - a'b$ равенъ нулю.

Предположимъ, что при этомъ ни одинъ изъ коэффициентовъ: a, a', b, b' не равенъ нулю. Докажемъ, что тогда:

1°. Если одно неизвѣстное представляется подъ видомъ $\frac{0}{0}$, то и другое неизвѣстное представляется подъ тѣмъ же видомъ.

Пусть, напр., $x = \frac{0}{0}$. Для этого нужно, чтобы

$$\begin{aligned} cb' &= c'b \\ ab' &= a'b. \end{aligned}$$

Перемноживъ эти два равенства крестъ-накрестъ (если равныя помножимъ на равныя, то...), найдемъ:

$$cb'a'b = c'bab'; \text{ откуда: } cb'a'b - c'bab' = 0, \text{ или } bb'(a'c - ac') = 0.$$

Такъ какъ числа b и b' не равны нулю, то послѣднее равенство возможно только тогда, когда $a'c - ac' = 0$; но тогда и $y = \frac{0}{0}$.

Также если допустимъ, что $y = \frac{0}{0}$, т.-е. $ac' = a'c$ и $ab' = a'b$, то, перемноживъ эти равенства крестъ-накрестъ, найдемъ: $ac'a'b = a'sab'$, откуда $aa'(c'b - cb') = 0$. Такъ какъ числа a и a' не равны 0, то послѣднее равенство даетъ: $c'b - cb' = 0$, а тогда и $x = \frac{0}{0}$.

2°. Если одно неизвѣстное представляется подъ видомъ $\frac{m}{0}$, гдѣ $m \neq 0$, то и другое неизвѣстное представляется подъ видомъ $\frac{n}{0}$, гдѣ $n \neq 0$. Дѣйствительно, если бы оно приняло видъ $\frac{0}{0}$, то и первое неизвѣстное, по доказанному, имѣло бы тотъ же видъ, а мы предполагали, что этого нѣтъ,

Рѣшенія: $x = \frac{0}{0}$ и $y = \frac{0}{0}$ означаютъ неопредѣленность задачи. Дѣйствительно, умноживъ все члены перваго уравненія на b' , а члены втораго на b (что можно сдѣлать, такъ какъ числа b и b' по предположенію, не равны 0), получимъ:

$$\begin{aligned} ab'x + bb'y &= cb' \\ a'bx + b'by &= c'b. \end{aligned} \tag{A}$$

Если $x = \frac{0}{0}$ и $y = \frac{0}{0}$, то $ab' = a'b$, $cb' = c'b$; тогда два уравне-

нныя (А) представляют собою одно уравненіе съ 2 неизвѣстными; а въ этомъ случаѣ неизвѣстныя могутъ имѣть безчисленное множество значеній (§ 118).

Рѣшенія: $x = \frac{m}{0}$ и $y = \frac{n}{0}$ означаютъ несовмѣстность уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, если $ab' = a'b$, а $cb' \neq c'b$, то лѣвыя части уравненія (А) имѣютъ одинаковыя численныя величины, а правыя—разныя; значить, эти уравненія несовмѣстны, и задача невозможна.

Изъ сказаннаго заключаемъ: система двухъ уравненій первой степени съ 2 неизвѣстными допускаетъ или одно опредѣленное рѣшеніе, или безчисленное множество рѣшеній, или же ни одного рѣшенія.

152. Случай, когда нѣкоторые изъ коэффициентовъ равны нулю Въ этомъ случаѣ не слѣдуетъ полагаться на общія формулы, выведенныя для неизвѣстныхъ, а должно подвергать каждый случай особому изслѣдованію. Положимъ, напр, что оба коэффициента при одномъ и томъ же неизвѣстномъ равны нулю. Пусть $b = b' = 0$, тогда $ab' - a'b = 0$ и $cb' - c'b = 0$, и общія формулы даютъ $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{m}{0}$ или $\frac{0}{0}$, смотря по тому, будетъ ли ac' не равно или равно $a'c$. Уравненія же въ этомъ случаѣ даютъ

$$\begin{cases} ax + 0 \cdot y = e \\ a'x + 0 \cdot y = e' \end{cases} \quad \text{откуда:} \quad \begin{cases} x = \frac{e}{a} \\ x = \frac{e'}{a'} \end{cases}$$

Если ac' не равно $a'c$, то $\frac{e}{a}$ не равно $\frac{e'}{a'}$, и уравненія невозможны, потому что для x получаются два различныя значенія; между тѣмъ, въ этомъ случаѣ формулы для неизвѣстныхъ даютъ: $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{m}{0}$. Если же $ac' = a'c$, то $\frac{e}{a} = \frac{e'}{a'}$; тогда для x получается опредѣленное рѣшеніе, а y можетъ имѣть всевозможныя значенія, хотя общія формулы въ этомъ случаѣ даютъ: $x = \frac{0}{0}$ и $y = \frac{0}{0}$.

ОТДѢЛЪ IV.

Степени и корни.

Г Л А В А I.

ОСНОВНЫЯ СВОЙСТВА ВОЗВЫШЕНІЯ ВЪ СТЕПЕНЬ.

153. Опредѣленія. Произведеніе n одинаковыхъ сомножителей a наз. n -ою степенью числа a .

Такъ, произведеніе 2. 2. 2 (равное 8) есть 3-я степень числа 2; произведеніе $(-3)(-3)$ (равное +9) есть 2-я степень числа -3 ; произведеніе $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ (равное $\frac{1}{32}$) есть 5-я степень числа $\frac{1}{2}$.

Вторая степень наз. иначе квадратомъ, а третья — кубомъ.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго находится n -ая степень числа a , наз. возвышеніемъ числа a въ n -ую степень.

n -ая степень числа a обозначается такъ: a^n . Изъ опредѣленія видно, что это выраженіе равносильно произведенію n сомножителей: $a. a. a. \dots a$.

Повторяющійся сомножитель (a) наз. основаніемъ степени или возвышаемымъ числомъ; число (n) одинаковыхъ сомножителей, наз. показателемъ степени.

По смыслу опредѣленія видно, что показатель степени есть число цѣлое положительное.

Впрочемъ, ради обобщенія условно допускаютъ степени съ показателемъ 0 и степени съ отрицательными показателями;

этимъ показателямъ, какъ мы видѣли (§ 68), придаютъ слѣдующій смыслъ:

- 1) выраженіе a^0 означаетъ частное $\frac{a^m}{a^m}$ и, слѣд., оно равно 1;
- 2) выраженіе a^{-n} означаетъ частное $\frac{a^m}{a^{m+n}}$ и, слѣд., оно равно дроби $\frac{1}{a^n}$.

Впослѣдствіи мы введемъ еще понятіе о дробныхъ показателяхъ

154. Правило знаковъ. Мы видѣли (§ 35), что произведеніе, въ которое входятъ отрицательные сомножители, оказывается положительнымъ въ томъ случаѣ, когда число такихъ сомножителей четное, и отрицательнымъ въ томъ случаѣ, когда число ихъ нечетное. Примѣняя это свойство къ произведенію одинаковыхъ сомножителей, т. е. къ степени, мы находимъ слѣдующее правило знаковъ:

отъ возвышенія отрицательнаго числа въ степень получается положительное число тогда, когда показатель степени—число четное, и отрицательное число тогда, когда показатель степени число нечетное.

Такъ: $(-5)^2 = (-5)(-5) = +25$; $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$;
и т. п.

Конечно, отъ возвышенія положительнаго члена и въ четную и въ нечетную степень получится положительное число.

155. Возвышеніе въ степень произведенія, частнаго и степени. Это возвышеніе выполняется согласно слѣдующимъ тремъ теоремамъ.

Теорема 1-я. Чтобы возвысить въ степень произведеніе, достаточно возвысить въ эту степень каждаго сомножителя отдѣльно.

Какъ эту теорему, такъ и двѣ послѣдующія, мы сначала докажемъ въ примѣненіи только къ положительнымъ показателямъ.

телямъ, а затѣмъ обобщимъ ихъ на показатели отрицательныхъ и нулевыхъ.

Пусть требуется пайти $(abc)^2$, т.-е. требуется возвысить произведение abc въ квадратъ. Это значить, что требуется abc умножить на abc . Такъ какъ произведение abc есть одночленъ, а при умноженіи одночленовъ показатели одинаковыхъ буквъ складываются, то

$$(abc)^2 = (abc)(abc) = a^{1+1}b^{1+1}c^{1+1} = a^2b^2c^2.$$

Вообще, если n есть цѣлое положительное число, то, согласно тому же правилу, будемъ имѣть:

$$(abc)^n = (abc)(abc)\dots = a^{1+1+\dots}b^{1+1+\dots}c^{1+1+\dots} = a^n b^n c^n.$$

Теорема 2-я. Чтобы возвысить степень въ степень, достаточно перемножить показатели этихъ степеней.

Пусть, напр., требуется возвысить a^2 въ кубъ, т.-е. требуется найти произведение $a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$. При умноженіи показатели одинаковыхъ буквъ складываются; поэтому:

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = a^6.$$

Вообще, если n есть цѣлое положительное число, то

$$(a^m)^n = a^m a^m a^m \dots = a^{m+m+m+\dots} = a^{mn}.$$

Теорема 3-я. Чтобы возвысить въ степень дробь, достаточно возвысить въ эту степень отдѣльно числителя и знаменателя.

Дѣйствительно, согласно правилу умноженія дробей, мы можемъ написать (если n есть цѣлое положительное число):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a \cdot a \cdot a \dots}{b \cdot b \cdot b \dots} = \frac{aaa\dots a^n}{bbb\dots b^n}.$$

156. Обобщеніе этихъ теоремъ. Покажемъ теперь, что теоремы эти остаются вѣрными и для показателей цѣлыхъ отрицательныхъ. Для этого примемъ во вниманіе, что число съ отрицательнымъ показателемъ равно дробь, у которой числитель есть 1, а знаменатель — то же число съ положительнымъ показателемъ, равнымъ

по абсолютной величинѣ отрицательному показателю; вѣдѣ-
ствие этого можемъ писать:

$$1) (abc)^{-n} = \frac{1}{(abc)^n} = \frac{1}{a^n b^n c^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} \cdot \frac{1}{c^n} = a^{-n} b^{-n} c^{-n}.$$

$$2) (a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{(-m)n};$$

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m(-n)};$$

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = 1 : \frac{1}{a^{mn}} = a^{mn} = a^{(-m)(-n)};$$

$$3) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1 : \frac{a^n}{b^n} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^n} = a^{-n} : b^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}.$$

Легко также убѣдиться, что теоремы эти примѣ-
нимы и къ нулевому показателю. Такъ:

$$(abc)^0 = a^0 b^0 c^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1; \quad (a^n)^0 = a^{n \cdot 0} = a^0 = 1.$$

157. Возвышеніе въ степень одночленовъ.

1°. Пусть требуется возвысить одночленъ $-3a^2b^3c$ въ n -ую
степень. Примѣняя теорему 1-ю, а затѣмъ 2-ю, получимъ:

$$(-3a^2b^3c)^n = (-3)^n (a^2)^n (b^3)^n c^n = (-3)^n a^{2n} b^{3n} c^n.$$

Правило. Чтобы возвысить въ степень одночленъ, доста-
точно возвысить въ эту степень его коэффициентъ и показателей
буквъ умножить на показателя степени.

2°. Дробныя выраженія возвышаются въ степень по теоремѣ
3-й, т. е. числитель и знаменатель возвышаются отдѣльно.

Примѣры.

$$1) (-2x^2y^3z^4)^3 = -8x^6y^9z^{12};$$

$$2) (-3ab^2c^3)^4 = 81a^4b^6c^{12};$$

$$3) \left(\frac{-3a^nb^2}{4cd^{r-1}}\right)^3 = \frac{(-3a^nb^2)^3}{(4cd^{r-1})^3} = \frac{-27a^{3n}b^6}{64c^3d^{3r-3}} = \frac{-27a^{3n}b^6}{64c^3d^{3r-3}}.$$

Г Л А В А П.

Возвышеніе въ квадратъ многочленовъ.

158. Теорема. Квадратъ многочлена равенъ: квадрату 1-го члена + удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й + квадратъ 2-го члена + удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й + квадратъ 3-го члена + удвоенное произведеніе суммы первыхъ трехъ членовъ на 4-й + квадратъ 4-го члена и т. д.,

$$\text{т. е. } (a+b+c+d+\dots)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + \\ + 2(a+b+c)d + d^2 + \dots$$

До к. Возвысимъ сначала въ квадратъ двучленъ $a+b$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Теперь приложимъ къ суммѣ $a+b$ третій членъ c и возвысимъ въ квадратъ трехчленъ $a+b+c$, разсматривая его, какъ двучленъ, въ которомъ первый членъ есть $a+b$, а второй членъ c :

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2.$$

Замѣнивъ въ этомъ выраженіи $(a+b)^2$ черезъ $a^2 + 2ab + b^2$, получимъ:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2.$$

Приложивъ затѣмъ четвертый членъ d и принявъ сумму $a+b+c$ за одночленъ, получимъ, подобно предыдущему:

$$(a+b+c+d)^2 = [(a+b+c)+d]^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2 = \\ = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2.$$

Продолжая такимъ образомъ прикладывать по одному члену, замѣтимъ, что, съ каждымъ прибавленіемъ одного новаго члена, въ квадратѣ многочлена прибавляются два члена: 1) удвоенное произведеніе суммы всѣхъ прежнихъ членовъ на новый членъ и 2) квадратъ этого новаго члена; значить, доказываемая теорема применима къ многочленамъ съ какимъ угодно числомъ членовъ.

159. Другое выраженіе для квадрата многочлена. Раскрывъ скобки въ правой части выведеннаго нами равенства и измѣнивъ порядокъ членовъ, получимъ:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd,$$

что можно высказать такъ: квадратъ многочлена равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ, сложенной съ удвоенными произведеніями: перваго члена на второй, перваго члена на третій, перваго члена на четвертый и т. д.; затѣмъ втораго члена на третій, втораго члена на четвертый и т. д.; затѣмъ третьяго члена на четвертый и т. д. Короче сказать:

квадратъ многочлена равенъ алгебраической суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ и всевозможныхъ удвоенныхъ произведеній, которыя можно составить, умножая каждый членъ многочлена на каждый членъ изъ тѣхъ, которые слѣдуютъ за нимъ.

160. Замѣчаніе о знакахъ. Многочленъ $a+b+c\dots$ представляетъ собою алгебраическую сумму, т.-е. члены его могутъ быть числами положительными, отрицательными и нулемъ. Полезно замѣтить, что послѣ возвышенія многочлена въ квадратъ со знакомъ $+$ окажутся, во-1-хъ, квадраты всѣхъ членовъ, и, во-2-хъ, тѣ удвоенныя произведенія, которыя произошли отъ умноженія членовъ съ одинаковыми знаками; со знакомъ же $-$ окажутся тѣ удвоенныя произведенія, которыя произошли отъ умноженія членовъ съ разными знаками. Напримѣръ:

$$\begin{aligned} (3x^2 - 2x + 1)^2 &= (3x^2)^2 + (2x)^2 + 1^2 - 2(3x^2)(2x) + 2(3x^2) \cdot 1 - 2(2x) \cdot 1 = \\ &= 9x^4 + 4x^2 + 1 - 12x^3 + 6x^2 - 4x - 9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x + 1. \end{aligned}$$

ГЛАВА III.

Основные свойства извлеченія корня.

161. Опредѣленія. Корнемъ n -ой степени изъ числа a наз. такое число, n -ая степень котораго равна a .

Такъ, корень 2-й степени изъ +49 есть +7, а также и -7, потому что $(+7)^2=+49$ и $(-7)^2=+49$; корень 3-й степени изъ -125 есть -5, потому что $(-5)^3=-125$; корень n -й степени изъ числа 0 есть 0, потому что $0=0$.

Замѣтимъ, что вмѣсто «корень n -ой степени» говорятъ иногда короче: « n -ый корень».

Число n , означающее, какой степени извлекается корень, наз. показателемъ корня; число это мы будемъ всегда предполагать цѣлымъ и положительнымъ.

Корень обозначается знакомъ $\sqrt{\quad}$ (знакъ радикала *); подъ горизонтальной чертой его пишутъ число, изъ котораго корень отыскивается, а надъ отверстиемъ угла ставятъ показателя корня; такъ, выраженіе $\sqrt[3]{27}$ означаетъ корень третьей степени изъ 27. Показателя корня второй степени принято опускать; напр., $\sqrt{16}$ замѣняетъ обозначеніе $\sqrt[2]{16}$.

Корень второй степени наз. иначе квадратнымъ, а корень третьей степени — кубичнымъ.

Число, стоящее подъ знакомъ радикала, наз. подкореннымъ числомъ.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается корень данной степени, наз. извлеченіемъ корня; это дѣйствіе, какъ видно изъ опредѣленія, обратно возвышенію въ степень.

Изъ опредѣленія корня слѣдуетъ:

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad (\sqrt[3]{a})^3 = a, \quad \dots \dots (\sqrt[n]{a})^n = a;$$

$$\sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt[3]{a^3} = a \quad \dots \dots \sqrt[n]{a^n} = a,$$

т.-е. возвышеніе въ степень и извлеченіе корня (той же степени) суть дѣйствія, взаимно уничтожающіяся.

*) Знакъ $\sqrt{\quad}$ произошелъ, по всей вѣроятности, изъ точки, которую въ 15 столѣтіи нѣкоторые авторы ставили передъ числомъ, изъ котораго надо извлечь корень. Въ началѣ 16-го столѣтія точку удлиннили въ черту. Въ 17-мъ столѣтіи окончательно возшло въ употребленіе теперешнее обозначеніе корня.

162. Арифметическій корень. Условимся называть корень арифметическимъ въ томъ случаѣ, когда онъ извлекается изъ положительнаго числа и самъ представляетъ собою положительное число. Такимъ образомъ, корень изъ отрицательнаго числа (напр., корень кубическій изъ -125) мы не будемъ называть арифметическимъ; равнымъ образомъ мы не будемъ называть арифметическимъ отрицательное значеніе корня изъ положительнаго числа (напр., отрицательное значеніе квадратнаго корня изъ $+49$).

Такъ какъ положительныя числа мы не различаемъ отъ арифметическихъ, то можно также сказать, что арифметическій корень есть корень изъ арифметическаго числа, выраженный тоже арифметическимъ числомъ.

163. Нѣкоторыя свойства арифметическаго корня. Укажемъ слѣдующія 3 свойства арифметическаго корня:

I. Если цѣлое число N не есть m -ая степень никакого цѣлаго числа, то $\sqrt[m]{N}$ не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ.

Напримѣръ, число 5 не есть квадратъ никакого цѣлаго числа; тогда $\sqrt{5}$ не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ. Докажемъ это свойство въ общемъ видѣ.

Если число N не есть m -ая степень никакого цѣлаго числа, то это значитъ, что $\sqrt[m]{N}$ не равно никакому цѣлому числу. Докажемъ, что онъ при этомъ не можетъ равняться и никакой дроби. Предположимъ противное, т.-е. допустимъ, что существуетъ нѣкоторая дробь, m -ая степень которой равна N ; пусть эта дробь, по сокращеніи ея, есть $\frac{a}{b}$. Тогда, согласно правилу возвышенія въ степень дроби, будемъ имѣть:

$$N = \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Это равенство возможно только тогда, когда a^m дѣлится безъ остатка на b^m , для чего необходимо, чтобы всѣ простые множители степени b^m входили въ число простыхъ множителей сте-

пени a^m . Но простые множители степени b^m суть тѣ, которые входятъ въ составъ основанія b (только повторенные m разъ); то же самое можно сказать о степени a^m ; числа же a и b не имѣютъ общихъ множителей (такъ какъ въ противномъ случаѣ, дробь $\frac{a}{b}$ могла бы сократиться). Значитъ, написанное выше равенство невозможно, и потому нельзя допустить, чтобы существовала дробь, m -ая степень которой равна числу N .

II. Если числитель или знаменатель арифметической несократимой дроби $\frac{a}{b}$ не есть m -ая степень никакого цѣлаго числа, то $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ.

Напримѣръ, въ несократимой дроби $\frac{5}{9}$, числитель не есть квадратъ никакого цѣлаго числа; въ такомъ случаѣ $\sqrt{\frac{5}{9}}$ не можетъ равняться ни цѣлому, ни дробному числу; въ несократимой дроби $\frac{8}{9}$ знаменатель не есть кубъ никакого цѣлаго числа; въ такомъ случаѣ $\sqrt[3]{\frac{8}{9}}$ не можетъ равняться ни цѣлому, ни дробному числу. Докажемъ это свойство въ общемъ видѣ.

Что $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ не можетъ равняться цѣлому числу, слѣдуетъ изъ того, что всякое цѣлое число, возвышенное въ m -ую степень, даетъ цѣлое число, а не дробь.

Предположимъ теперь, что этотъ корень равняется пѣкоторой дроби, которая, по сокращеніи ея, пусть будетъ $\frac{p}{q}$. Тогда:

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}.$$

Это равенство возможно только тогда ¹⁾, когда $a=p^m$ и $b=q^m$;

1) Въ курсѣ арифметики доказывается, что двѣ несократимыя дроби равны другъ другу только тогда, когда у нихъ равны числители и равны знаменатели см, напр., А. Киселевъ систематическій курсъ арифметики, § 156, слѣдствіе).

по этого быть не может согласно условію. Значить, нельзя допустить, чтобы разсматриваемый корень равнялся какой-нибудь дроби.

III. Арифметическій корень данной степени изъ данного числа можетъ быть только одинъ.

Напримѣръ, $\sqrt[4]{9}$ равенъ $\frac{2}{3}$ и только одному этому числу; $\sqrt[3]{27}$ равенъ 3 и не можетъ равняться никакому иному числу.

Дѣйствительно, допустимъ, что $\sqrt[m]{N}$ можетъ равняться двумъ различнымъ арифметическимъ числамъ a и b ; тогда было бы, что $a^m = N$ и $b^m = N$ и, слѣдов., $a^m = b^m$. Но это равенство невозможно, такъ какъ если, напр., $a > b$, то $aa > bb$, потому что множимое и множитель въ первомъ изъ этихъ произведеній больше соответственно множимаго и множителя во второмъ произведеніи, а съ увеличеніемъ множимаго и съ увеличеніемъ множителя произведеніе увеличивается¹⁾; по той же причинѣ $aaa > bbb$ и вообще $a^m > b^m$. Значить, если $a \neq b$, то a^m не можетъ равняться b^m , и потому нельзя допустить, чтобы $\sqrt[m]{N}$ имѣлъ 2 различныя арифметическія значенія.

164. Алгебраическій корень. Мы будемъ называть выраженіе $\sqrt[m]{a}$ алгебраическимъ корнемъ m -ой степени изъ числа a въ томъ случаѣ, когда не требуется непременно, чтобы подкоренное число a было положительнымъ и чтобы изъ всѣхъ возможныхъ значеній самаго корня бралось только одно положительное.

Извлеченіе алгебраическаго корня, какъ мы сейчасъ увидимъ, приводится къ нахожденію арифметическаго корня.

165. Нѣкоторыя свойства алгебраическаго корня. Укажемъ слѣдующія 4 свойства такого корня.

I. Корень нечетной степени изъ положительнаго числа (если

¹⁾ Это свойство относится также и къ произведенію несоизмѣримыхъ чиселъ; поэтому положительное значеніе $\sqrt[m]{N}$ можетъ быть только одно и въ томъ случаѣ, когда оно есть число несоизмѣримое

онъ существуетъ) есть положительное число, абсолютная величина котораго равна арифметическому корню той же степени изъ абсолютной величины подкоренного числа.

Такъ, $\sqrt[3]{+8}$, если такой корень существуетъ, долженъ быть числомъ положительнымъ, такъ какъ отрицательное число, возвышенное въ нечетную степень, даетъ отрицательное число; абсолютная величина этого корня должна равняться арифметическому $\sqrt[3]{8}$, т.-е. числу 2, такъ какъ только при этой величинѣ послѣ возвышенія въ 3-ю степень получимъ число 8.

II. Корень нечетной степени изъ отрицательнаго числа (если онъ существуетъ) есть отрицательное число, абсолютная величина котораго равна арифметическому корню той же степени изъ абсолютной величины подкоренного числа.

Такъ, $\sqrt[3]{-8}$, если такой корень существуетъ, долженъ быть числомъ отрицательнымъ, такъ какъ всякое положительное число, возвышенное въ какую бы то ни было степень, даетъ положительное число, а не отрицательное; абсолютная величина этого корня должна равняться арифметическому $\sqrt[3]{8}$, т.-е. числу 2, такъ какъ только при этой величинѣ послѣ возвышенія въ 3-ю степень получимъ число 8.

III. Корень четной степени изъ положительнаго числа (если онъ существуетъ) имѣетъ два значенія съ противоположными знаками; абсолютная величина каждого изъ этихъ значеній равна арифметическому корню той же степени изъ абсолютной величины подкоренного числа.

Такъ, $\sqrt{+4}=+2$ и $\sqrt{+4}=-2$, потому что $(+2)^2=+4$ и $(-2)^2=+4$; никакому третьему числу $\sqrt{+4}$ равняться не можетъ; точно такъ же $\sqrt[4]{+81}=+3$ и $\sqrt[4]{+81}=-3$, потому что обѣ степени $(+3)^4$ и $(-3)^4$ равны $+81$, тогда какъ никакое третье число, возвышенное въ 4-ю степень, не можетъ дать $+81$.

Двойное значеніе корня обозначается обыкновенно постановкою двухъ знаковъ \pm передъ абсолютной величиной корня; такъ, пишутъ: $\sqrt[4]{+81}=\pm 3$, или проще, $\sqrt[4]{81}\pm 3$.

IV. Корень четной степени изъ отрицательнаго числа не можетъ равняться никакому—ни положительному, ни отрицательному—числу, потому что всякое число, какъ положительное такъ и отрицательное, возвышенное въ четную степень, даетъ положительное число, а не отрицательное. Напр., $\sqrt{-9}$ не можетъ равняться ни $+3$, ни -3 и никакому иному числу.

Корень четной степени изъ отрицательнаго числа принято называть мнимымъ числомъ; въ противоположность такимъ числамъ алгебраическія числа, которыя мы до сего времени разсматривали, называются вещественными или действительными числами.

166. Извлечение корня изъ произведенія, изъ степени и изъ дроби. Это извлечение выполняется согласно слѣдующимъ тремъ теоремамъ.

Замѣтимъ, что въ этихъ теоремахъ предполагается, что всё подкоренныя числа взяты такими, что изъ нихъ корень извлекается; кромѣ того, корни разумѣются арифметическіе.

Теорема 1. Чтобы извлечь корень изъ произведенія, достаточно извлечь его изъ каждаго сомножителя отдѣльно.

Требуется доказать, что: $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c}$.

Для доказательства возвысимъ правую часть этого предпологаемаго равенства въ n -ую степень, для чего достаточно примѣнить теорему 1-ю § 155 («чтобы возвысить въ степень произведеніе, достаточно...»).

$$\left(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \left(\sqrt[n]{c}\right)^n.$$

Но, согласно опредѣленію: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$ и $\left(\sqrt[n]{c}\right)^n = c$.

Значить: $\left(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c}\right)^n = abc$.

Если же n -ая степень произведенія $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c}$ равна abc , то это значить, что оно представляетъ собою n -ый корень изъ abc .

Примѣръ. $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{8 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 4 = 8$.

Теорема 2. Чтобы извлечь корень из степени, показатель которой (положительный или отрицательный) дѣлится безъ остатка на показателя корня, достаточно раздѣлить показателя степени на показателя корня.

Такъ, $\sqrt[3]{a^6} = a^2$, потому что $(a^2)^3 = a^6$; $\sqrt{a^{-8}} = a^{-4}$, потому что $(a^{-4})^2 = a^{-8}$.

Докажемъ это въ общемъ видѣ. Пусть въ выраженіи $\sqrt[n]{a^m}$ положительное или отрицательное цѣлое число m дѣлится на цѣлое число n безъ остатка; тогда, назвавъ частное отъ дѣленія m на n буквою p , можемъ положить, что $m = np$. Требуется доказать, что:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{np}} = a^p.$$

Для доказательства возвысимъ число a^p въ n -ую степень, для чего достаточно примѣнить теорему 2-ю § 155 («чтобы возвысить степень въ другую степень, достаточно...»):

$$(a^p)^n = a^{pn} = a^m.$$

Если же n -ая степень числа a^p равна a^m , то это значитъ, что $a^p = \sqrt[n]{a^m}$.

Примѣры. 1) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4.$

2) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^6}} = \sqrt[3]{2^{-6}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$

Теорема 3. Чтобы извлечь корень изъ дроби, достаточно извлечь его изъ числителя и знаменателя отдѣльно.

Требуется доказать, что $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$

Для доказательства возвысимъ правую часть этого предполагаемаго равенства въ n -ую степень, для чего достаточно при-

мѣнить теорему 3-ю § 156 («чтобы возвысить въ степень дробь, достаточно...»).

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

Значитъ, предполагаемое равенство вѣрно.

Примѣръ. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$

167. Извлеченіе корня изъ одночленовъ.

1°. Пусть требуется извлечь корень 3-й степени изъ одночлена $8a^9b^6c^{12}$. Примѣняя теорему 1-ю, а затѣмъ 2-ю, получимъ:

$$\sqrt[3]{8a^9b^6c^{12}} = \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{a^9} \sqrt[3]{b^6} \sqrt[3]{c^{12}} = 2a^3b^2c^4.$$

Правило. Чтобы извлечь корень изъ одночлена, достаточно извлечь его изъ коэффициента и раздѣлить показатели буквъ на показатели корня, если это дѣленіе возможно пацѣло.

2°. Чтобы извлечь корень изъ дробнаго выраженія, достаточно примѣнить теорему 3-ю, т-е. извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно; напр.:

$$\sqrt[3]{\frac{27a^6x^{3n}}{m^3n^3}} = \frac{\sqrt[3]{27a^6x^{3n}}}{\sqrt[3]{m^3n^3}} = \frac{3a^2x^n}{m^3n}.$$

168. Нѣкоторыя преобразованія радикала.

Доказанныя выше теоремы позволяютъ, между прочимъ, дѣлать слѣдующія преобразованія радикала:

1°. Вынесеніе множителей за знакъ радикала. Когда показатели всѣхъ или нѣкоторыхъ буквъ въ подкоренномъ выраженіи больше показателя корня, но не дѣлятся на него безъ остатка, тогда можно разложить подкоренное выраженіе на множители и извлечь корень изъ тѣхъ множителей, изъ которыхъ это возможно.

- Примѣры.** 1) $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2 a} = \sqrt{a^2} \sqrt{a} = a \sqrt{a}$.
 2) $\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3 a} = \sqrt[3]{a^3} \sqrt[3]{a} = a \sqrt[3]{a}$.
 3) $\sqrt{x^{13}} = \sqrt{x^{10} x^3} = \sqrt{x^{10}} \sqrt{x^3} = x^2 \sqrt{x^3}$.
 4) $\sqrt{24a^4 x^3} = \sqrt{4a^4 \cdot 3 \cdot 2x} = 2a^2 x \sqrt{6x}$.

2°. **Подведение множителей подъ знакъ радикала.** Иногда бываетъ полезно, наоборотъ, подвести подъ знакъ радикала множителей, стоящихъ передъ нимъ; для этого надо возвысить ихъ въ степень, показатель которой равенъ показателю радикала, и написать множителями подъ радикаломъ.

- Примѣры.** 1) $a^2 \sqrt{a} = \sqrt{(a^2)^2 a} = \sqrt{a^4 a} = \sqrt{a^5}$.
 2) $3x^2 y \sqrt{xy} = \sqrt{(3x^2 y)^2 xy} = \sqrt{27x^4 y^3}$.

3°. **Освобожденіе подкореннаго выраженія отъ знаменателя.** Покажемъ, какъ можно это выполнить, на слѣдующихъ примѣрахъ:

- 1) $\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}$. Сдѣлаемъ знаменателя квадратомъ. Для этого

умножимъ его на 2, на a и на x , т.-е. на $2ax$. Чтобы дробь не измѣнила своей величины, умножимъ и числителя на $2ax$:

$$\sqrt{\frac{3}{2ax^3}} = \sqrt{\frac{6ax}{4a^2x^4}} = \frac{\sqrt{6ax}}{\sqrt{4a^2x^4}} = \frac{1}{2ax^2} \sqrt{6ax}.$$

- 2) $\sqrt{2a + \frac{1}{4x} - \frac{5}{x^2}}$. Сначала приведемъ всѣ члены многочлена къ одинаковому знаменателю:

$$\sqrt{2a + \frac{1}{4x} - \frac{5}{x^2}} = \sqrt{\frac{8ax^2 + x - 20}{4x^2}}$$

Теперь сдѣлаемъ знаменателя кубомъ, умноживъ оба члена дроби на $2x$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(8ax^2 + x - 20)2x}{8x^3}} &= \frac{\sqrt[3]{16ax^3 + 2x^2 - 40x}}{\sqrt[3]{8x^3}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{16ax^3 + 2x^2 - 40x}}{2x} = \frac{1}{2x} \sqrt[3]{16ax^3 + 2x^2 - 40x}. \end{aligned}$$

ГЛАВА IV.

Извлеченіе ариѳметическаго квадратнаго корня.

1. Извлеченіе квадратнаго корня изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ данномъ цѣломъ числѣ.

169. Предварительное замѣчаніе. Если станемъ возвышать въ квадратъ числа натурального ряда: 1, 2, 3, 4..., то получимъ безкопечный рядъ возрастающихъ квадратовъ:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\dots$$

Очевидно, что всякое цѣлое число, не паходящееся въ этомъ ряду (напр. 40), не можетъ быть квадратомъ цѣлаго числа; въ такомъ случаѣ, какъ мы видѣли (§ 163, 1), оно не можетъ быть и квадратомъ дроби. Значитъ, изъ такого числа нельзя извлечь квадратнаго корня. Но мы условимся, что если требуется извлечь квадратный корень изъ какого-нибудь цѣлаго числа, то это надо понимать въ томъ смыслѣ, что требуется извлечь квадратный корень или изъ самаго числа (если оно окажется квадратомъ цѣлаго числа), или же изъ наибольшаго квадрата цѣлаго числа, какой заключается въ данномъ числѣ.

170. Число цифръ въ корнѣ. Легко опредѣлить заранѣе, сколько цифръ въ квадратномъ корнѣ изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ данномъ числѣ, напр., въ числѣ 4082. Для этого примемъ во вниманіе слѣдующую таблицу:

$$1^2=1, \quad 10^2=100, \quad 100^2=10000, \quad 1000^2=1000000, \\ 10000^2=100000000 \text{ и т. д.}$$

Такъ какъ $4082 < 10000$, то наибольшій квадратъ цѣлаго числа, заключающійся въ 4082, менѣе 10000; съ другой стороны, такъ какъ $4082 > 100$, то наибольшій квадратъ, заключающійся въ 4082, болѣе (или равенъ) 100. Значитъ, квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ 4082, долженъ быть менѣе 100 и болѣе (или равенъ) 10, т.-е. онъ долженъ состоять изъ двухъ цифръ.

Подобными рассуждениями мы можем опредѣлить, если нужно, число цифръ корня изъ всякаго данного числа. Ниже (§ 175) мы укажемъ болѣе простой приемъ для этого.

171. Свойство числа десятковъ корня. Когда данное число болѣе 100, то квадратный корень изъ него болѣе (или равенъ) 10 и, слѣдов., состоитъ изъ двухъ или болѣе цифръ. Сколько бы цифръ въ немъ ни было, мы условимся разсматривать его, какъ сумму только десятковъ и единицъ; если, напр., корень будетъ число 358, то мы будемъ его представлять такъ: 35 десятковъ + 8 ед.

Пусть требуется извлечь кв. корень изъ какого-нибудь числа, большаго 100, напр., изъ числа 4082. Обозначимъ число десятковъ корня черезъ x (все равно, будетъ ли оно однозначное или многозначное), а число его единицъ черезъ y . Такъ какъ въ каждомъ десяткѣ содержится 10 ед., то искомый корень выразится $10x+y$. Квадратъ этой суммы долженъ быть наибольшимъ квадратомъ цѣлаго числа, заключающимся въ 4082; въ этомъ числѣ можетъ быть еще нѣкоторый избытокъ надъ наибольшимъ квадратомъ, который назовемъ остаткомъ отъ извлеченія корня; поэтому можемъ написать уравненіе:

$$4082 = (10x+y)^2 + \text{ост.} = 100x^2 + 2xy10 + y^2 + \text{ост.}$$

Чтобы пайти неизвѣстное x , опредѣлимъ, сколько сотенъ заключается въ лѣвой части уравненія и сколько ихъ въ правой части. Въ лѣвой части сотенъ заключается 40. Въ первомъ членѣ ($100x^2$) правой части сотенъ, очевидно, заключается x^2 въ суммѣ остальныхъ трехъ членовъ правой части сотни могутъ быть, по могутъ и не быть (что зависитъ отъ величины чиселъ x и y и остатка отъ извлеченія)¹⁾; значить, въ правой части уравненія всѣхъ сотенъ будетъ или x^2 , или больше x^2 . Такъ какъ число сотенъ въ лѣвой части уравненія должно равняться числу сотенъ въ правой, то

$$40 \geq x^2 \text{ и, слѣд.: } x^2 \leq 40.$$

¹⁾ Если, напр., допустимъ, что $x=6$, $y=8$, то уже одинъ членъ $2xy$ 10-равный тогда числу 960, будетъ содержать въ себѣ 9 сотенъ; если же примемъ, что $x=1$, $y=2$, то тогда въ суммѣ двухъ членовъ $2xy$ 10-равной 44, не будетъ содержаться ни одной сотни.

Изъ этого слѣдуетъ, что x^2 есть такой квадратъ (цѣлаго числа), который содержится въ '40; по такихъ квадратовъ есть нѣсколько, а именно. 36, 25, 16 и т. д. Докажемъ, что за x^2 надо принять н а и б о л ь ш и й п з ъ э т и х ъ к в а д р а т о в ъ, т.-е. 36. Дѣйствительно, если бы мы взяли за x^2 , положимъ, 25, то искомый корень содержалъ бы въ себѣ 5 десятковъ съ нѣсколькими единицами; но число, состоящее изъ 5 десятковъ съ нѣсколькими единицами (хотя бы этихъ единицъ было и 9), меньше 6 десятковъ ($59 < 60$); между тѣмъ квадратъ 6 десятковъ составляетъ только 36 сотенъ ($60^2 = 3600$), что меньше 4082, а такъ какъ мы ищемъ квадратный корень изъ н а и б о л ь ш а г о квадрата цѣлаго числа, какой только заключается въ 4082, то не можемъ взять для корня 5 десятковъ съ единицами, когда и 6 десятковъ оказывается не много. Если же за x^2 надо взять число 36, то $x = \sqrt{36} = 6$. Такимъ образомъ:

число десятковъ искомага корня (будетъ ли оно однозначное или многозначное) равно квадратному корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ даннаго числа.

Когда данное число, какъ взятое нами, менѣе 10000, тогда число сотенъ въ немъ менѣе 100; въ этомъ случаѣ десятки корня прямо находятся по таблицѣ умноженія.

172. Свойство числа единицъ корня. Положимъ, что мы нашли десятки корня; тогда мы можемъ вычислить квадратъ десятковъ, т.-е. членъ $100x^2$; для нашего примѣра $x=6$ и потому $100x^2$ составить 3600. Вычтемъ это число изъ 4082:

4082	для этого достаточно изъ 40 сотенъ вычестъ 36 со-
— 36	тенъ и къ остатку снести цифры 8 и 2. Получив-
— 482	шееся число 482 назовемъ п е р в ы м ъ о с т а т -

к о м ъ. Въ немъ заключаются: удвоенное произведеніе десятковъ корня на его единицы, квадратъ единицъ и остатокъ отъ извлеченія, если онъ есть, т.-е.

$$482 = 2xy10 + y^2 + \text{ост.}$$

Чтобы найти y , опредѣлимъ, сколько десятковъ заключается въ каждой части этого уравненія. Въ лѣвой части ихъ 48, а въ

правой $2xy$ или больше (если въ суммѣ $y^2 + \text{ост.}$ окажутся десятки) ¹⁾ поэтому:

$$48 \geq 2xy; \text{ слѣд., } 2xy \leq 48 \text{ и поэтому } y \leq \frac{48}{2x}.$$

Это свойство числа единицъ корня мы можемъ высказать такъ: число единицъ корня или равно цѣлому частному отъ дѣленія числа десятковъ перваго остатка на удвоенное число десятковъ корня, или меньше этого частнаго.

Пользуясь этимъ свойствомъ, мы можемъ найти единицы корня, если его десятки уже найдены. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, подставивъ на мѣсто x найденное прежде число 6, найдемъ, что $y \leq 4$. Отсюда слѣдуетъ, что y равенъ или 4, или 3, или 2, или 1, или 0. Здѣсь мы не можемъ утверждать заранѣе, что y равняется наибольшему изъ этихъ чиселъ; это иногда бываетъ, а иногда и нѣтъ. Чтобы узнать окончательно, какому изъ этихъ чиселъ равняется y , станемъ испытывать эти цифры, начиная съ большей, т.-е. съ 4. Для этого вычислимъ сумму $2xy10 + y^2$ и сравнимъ полученное число съ 482; если эта сумма дастъ число, большее 482, то испытываемая цифра не годится; тогда подвергнемъ испытанію слѣдующую меньшую цифру.

Вычислить сумму $2xy10 + y^2$ всего проще можно такъ:
 $2xy10 + y^2 = (2x \cdot 10 + y)y = (2 \cdot 6 \cdot 10 + 4)4 = (120 + 4)4 = 124 \cdot 4 = 496$, т.-е., чтобы получить сумму удвоеннаго произведенія десятковъ на единицы и квадрата единицъ, слѣдуетъ къ удвоенному числу десятковъ (къ 12) приписать справа цифру единицъ (4) и на эту же цифру умножить получившееся число.

Такъ какъ $496 > 482$, то цифра 4 не годится; надо испытать цифру 3 подобнымъ же способомъ: $123 \cdot 3 = 369$.

Такъ какъ $369 < 482$, то цифра 3 годится. Искомый корень есть 63.

Вычтя 369 изъ 482, получимъ окончательный остатокъ отъ извлеченія корня: $482 - 369 = 113$, такъ что можемъ написать:

$$4082 = 63^2 + 113.$$

¹⁾ что, напр., будетъ при $y > 3$.

173. Извлечение квадратнаго корня, состоящаго изъ одной или изъ двухъ цифръ. Если данное число меньше 100, то квадратный корень изъ него выражается одною цифрою, и тогда его легко найти по таблицѣ умноженія.

Если же данное число, напр., 4082, болѣе 100, но менѣе 10000, то квадратный корень изъ него выражается 2 цифрами. Согласно сказанному въ предыдущихъ параграфахъ, цифры эти всего удобнѣе находятъ слѣдующимъ образомъ:

$\sqrt{40'82} = 63$	Отдѣливъ въ подкоренномъ числѣ сотни, из-
36	влекаютъ квадр. корень изъ наибольшаго дѣлага
123 $\overline{)48'2}$	квадрата, заключающагося въ числѣ ихъ; най-
3 $\overline{)36\ 9}$	денное число (6) пишутъ въ корнѣ на мѣстѣ
11 3	десятковъ. Вычитаютъ квадратъ десятковъ корня

(36) изъ сотенъ даннаго числа и къ остатку отъ сотенъ сносятъ двѣ остальные цифры. Далѣе отъ остатка проводятъ вертикальную черту, за которую пишутъ удвоенное число десятковъ корня (12). Отдѣливъ въ остаткѣ десятки, дѣлятъ число ихъ (48) на удвоенное число десятковъ корня (на 12), т.-е. на число, поставленное раньше палѣво отъ вертикальной черты. Цѣлое число, получившееся отъ этого дѣленія (число 4), подвергаютъ испытанію. Для этого приписываютъ его справа къ удвоенному числу десятковъ (за вертикальной чертой) и на него же умножаютъ получившееся отъ этого число (124 умножаютъ на 4). Если произведеніе окажется больше остатка (какъ въ нашемъ примѣрѣ), то испытываемая цифра не годится; тогда подвергаютъ испытанію слѣдующую меньшую цифру (123 умножаютъ на 3). Получивъ произведеніе, не большее остатка, подписываютъ его подъ остаткомъ и вычитаютъ, а испытываемую цифру пишутъ въ корнѣ на мѣстѣ единицъ.

174. Извлечение квадратнаго корня, состоящаго изъ трехъ или болѣе цифръ. Пусть требуется извлечь квадратный корень изъ какого-нибудь числа, большаго 10000, напр., изъ 35782. Квадратный корень изъ такого числа болѣе (или равенъ) 100 и потому состоитъ изъ трехъ или болѣе цифръ. Изъ сколькихъ бы цифръ онъ ни состоялъ, будемъ

его разсматривать, какъ состоящій только изъ двухъ частей изъ десятковъ и изъ единицъ, и воспользуемся доказанными выше свойствами числа десятковъ корня и числа его единицъ. Число десятковъ корня, какъ мы видѣли (§ 171), равно квадратному корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ, т.-е. въ 357; значить, прежде всего надо извлечь квадратный корень изъ этого числа.

Такъ какъ число 357 имѣетъ только три цифры, то этотъ корень найдется по предыдущему.

$\begin{array}{r} \sqrt{3'57} = 18 \\ 1 \\ 28 \overline{) 25'7} \\ 8 \overline{) 22 \ 4} \\ \underline{ 3 \ 3} \end{array}$	<p>Значить, въ искомомъ корнѣ изъ 35782 заключена 18 десятковъ. Чтобы найти единицы его, надо, согласно доказанному прежде (§ 172), предварительно изъ 35782 вычесть квадратъ 18 десятковъ, для чего достаточно изъ 357 вычесть квадратъ 18 и къ остатку снести цифры 8 и 2. Остатокъ отъ вычитанія квадрата 18 изъ 357 у насъ уже есть: это 33. Значить, для полученія остатка отъ вычитанія квадрата 18 десятковъ изъ 35782, достаточно къ 33 приписать справа цифры 8 и 2. Дѣйствіе мы можемъ продолжать тамъ же, гдѣ находили $\sqrt{357}$:</p>
--	--

$\begin{array}{r} \sqrt{3'57'82} = 189 \\ 1 \\ 28 \overline{) 25'7} \\ 8 \overline{) 22 \ 4} \\ 369 \overline{) 338'2} \\ 9 \overline{) 332 \ 1} \\ \underline{ 6 \ 1.} \end{array}$	<p>Отдѣливъ десятки въ остаткѣ 3382, дѣлимъ, согласно доказанному, число ихъ (338) на удвоенное число десятковъ корня (на 36); цифру (9), полученную отъ дѣленія, подвергаемъ испытанію, для чего ее приписываемъ справа къ удвоенному числу десятковъ корня (къ 36) и на нее умножаемъ получившееся число (369 на 9). Такъ какъ произведеніе оказалось меньше второго остатка, то цифра 9 годится; ее пишемъ въ корнѣ на мѣстѣ единицъ.</p>
---	--

Вообще, чтобы извлечь квадратный корень изъ какого угодно числа, надо сначала извлечь квадр. корень изъ числа его сотенъ; если это число болѣе 100, то придется искать квадр. корень изъ числа сотенъ этихъ сотенъ, т.-е. изъ десятковъ тысячъ даннаго числа; если и это число болѣе 100, придется извлекать квадр. корень изъ числа сотенъ десятковъ тысячъ, т.-е. изъ миллионныхъ даннаго числа и т. п.

Правило. Чтобы извлечь квадратный корень из данного числа, разбивают его, ть правой руки къ лѣвой, на грани по цифры въ каждой, кромѣ послѣдней, въ которой можетъ быть и одна цифра. Чтобы айти первую цифру корня, извлекаютъ квадратный корень изъ первой грани. Чтобы айти вторую цифру, вычитаютъ изъ первой грани квадратъ первой цифры корня, къ остатку сносятъ вторую грань числа десятковъ получившагося числа дѣлятъ на удвоенную первую цифру корня; полученное цѣлое число подвергаютъ испытанію. Слѣдующія цифры корня находятся по тому же приему.

Если послѣ снесенія грани число десятковъ получившагося числа окажется меньше дѣлителя, т.-е. меньше удвоенной айденой части корня, то въ корнѣ ставятъ 0 и сносятъ слѣдующую грань.

Вотъ примѣры извлеченія квадратнаго корня изъ чиселъ, состоящихъ изъ многихъ граней:

$\sqrt{3'50'34'87'59} = 18717$ <pre> 1 8 25'0. . . . 8 22 4. . . . 67 268'4. . . 7 256 9. 3741 658'7. . 1 374 1. . 37427 28465'9 7 26198 9 2267 0 </pre>	$\sqrt{9'51'10'56} = 3084$ <pre> 9 608 511'0. . 8 486 4. . 6164 2465'6 4 2465 6 0 </pre>	$\sqrt{8'72'00'00} = 2952$ <pre> 4 49 47'2 . . 9 44 1 . . 585 310'0. . 5 292 5. . 5902 1750'0 1 180 4 569 6 </pre>
--	---	--

175. Число цифръ въ корнѣ. Изъ процесса нахождения цифръ корня можно заключить, что въ квадратномъ

корнѣ столько цифръ, сколько въ подкоренномъ числѣ заключается группъ по 2 цифры каждая, кромѣ одной, которая можетъ имѣть и 2, и 1 цифру; другими словами: если въ подкоренномъ числѣ четное число цифръ, то въ корнѣ вдвое меньше цифръ; если же въ подкоренномъ числѣ нечетное число цифръ, то въ корнѣ цифръ вдвое меньше этого числа, увеличеннаго на 1. Напримѣръ, квадратный корень изъ 6-значнаго числа содержитъ 3 цифры, квадратный корень изъ 7-значнаго числа содержитъ 4 цифры.

176. Какъ узнать, не мала ли цифра, взятая въ корнѣ. Можетъ случиться, что, находя какую-нибудь цифру корня, мы по ошибкѣ взяли цифру, меньшую, чѣмъ слѣдовало бы. Существуетъ признакъ, по которому это легко обнаружить.

Если въ корнѣ взята цифра, меньшая, чѣмъ слѣдуетъ, то остатокъ окажется больше удвоеннаго корня плюсъ единица или равенъ этому числу. Пусть, напр., мы взяли въ корнѣ число a , когда слѣдовало бы взять больше, положимъ, $a+1$. Въ такомъ случаѣ подкоренное число больше или равно $(a+1)^2$, и потому избытокъ его надъ a^2 , т.-е. остатокъ отъ извлеченія, долженъ быть больше или равенъ разности $(a+1)^2 - a^2$, которая равна $2a+1$.

Обратно, если остатокъ отъ извлеченія больше удвоеннаго корня плюсъ единица или равенъ этому числу, то въ корнѣ взято меньше, чѣмъ слѣдуетъ. Дѣйствительно, если остатокъ больше или равенъ $2a+1$, то подкоренное число больше или равно $a^2+(2a+1)$, т.-е. оно больше или равно $(a+1)^2$, и потому квадратный корень изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключеннаго въ данномъ числѣ, будетъ не a , а по крайней мѣрѣ $a+1$.

Примѣры:

$$1) \sqrt{23'45} = 47$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 87 \overline{) 74'5} \\ \underline{7 \ 609} \\ 136 \end{array}$$

Остатокъ 136 больше $2 \cdot 47 + 1$; значитъ, взятая для испытанія цифра 7 мала.

$$2) \sqrt{23'45} = 48$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 88 \overline{) 74'5} \\ \underline{8 \ 704} \\ 41 \end{array}$$

Остатокъ 41 меньше $2 \cdot 48 + 1$; значитъ, взятая для испытанія цифра 8 не мала.

2. Извлечение приближенных квадратных корней.

177. Точные квадраты. Числа, из которых квадратный корень может быть выраженъ цѣлымъ или дробнымъ числомъ, наз. точными квадратами. Есть очень много чиселъ, какъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ, которыя не могутъ бѣть названы точными квадратами. Это, какъ слѣдуетъ изъ свойствъ арифметическаго корня (§ 163), во-1-хъ, всѣ тѣ цѣлыя числа, которыя не представляютъ собою квадратовъ цѣлыхъ чиселъ; и, во-2-хъ, всѣ тѣ дроби, у которыхъ или числитель, или знаменатель, или оба эти члена не представляютъ собою квадратовъ цѣлыхъ чиселъ.

Изъ такихъ чиселъ (ихъ называютъ иногда неточными квадратами) можно извлекать только приближенные квадратные корни, опредѣляемые слѣдующимъ образомъ.

178. Опредѣленія. 1) Приближеннымъ квадратнымъ корнемъ изъ даннаго (цѣлаго или дробнаго) числа съ точностью до 1 наз. каждое изъ двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыя различаются одно отъ другого на 1 и между квадратами которыхъ заключается данное число; меньшее изъ этихъ чиселъ наз. приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ, а большее—приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ.

Напр., приближенный квадратный корень изъ $56\frac{1}{2}$ съ точностью до 1 съ недостаткомъ есть 7, а съ избыткомъ 8, потому что эти цѣлыя числа различаются на 1 и между квадратами ихъ заключается $56\frac{1}{2}$, такъ какъ $7^2=49$, а $8^2=64$ и, слѣдов.:

$$7^2 < 56\frac{1}{2} < 8^2.$$

Вообще, если x есть приближенный квадратный корень изъ числа A съ точностью до 1 и взятый съ недостаткомъ, то $x+1$ будетъ приближенный квадратный корень изъ этого числа съ точностью до 1, по взятый съ избыткомъ, такъ что

$$x^2 < A < (x+1)^2.$$

Можно также сказать, что приближенный квадратный корень из данного числа с точностью до 1, взятый с недостаткомъ, представляет собою наибольшее цѣлое число, квадратъ котораго не превосходитъ данного числа.

2) Приближеннымъ квадратнымъ корнемъ изъ данного (цѣлаго или дробнаго) числа с точностью до $\frac{1}{n}$ наз. каждая изъ двухъ такихъ дробей с знаменателемъ n , которыя различаются одна отъ другой на $\frac{1}{n}$ и между квадратами которыхъ заключается данное число; меньшая изъ этихъ дробей наз. приближеннымъ корнемъ с недостаткомъ, а бѣльшая—приближеннымъ корнемъ с избыткомъ.

Напр., приближенный квадратный корень изъ 27,5 с точностью до $\frac{1}{10}$ с недостаткомъ есть 5,2, а с избыткомъ 5,3, потому что эти дроби, имѣя знаменателя 10, различаются на $\frac{1}{10}$, и между квадратами ихъ заключается 27,5, такъ какъ $5,2^2=27,04$ и $5,3^2=28,09$ и, слѣд.:

$$5,2^2 < 27,5 < 5,3^2.$$

Вообще, если $\frac{x}{n}$ есть пригл. квадр. корень изъ числа A с точностью до $\frac{1}{n}$ и взятый с недостаткомъ, то $\frac{x+1}{n}$ будетъ пригл. квадр. корень изъ этого числа с точностью до 1, но взятый с избыткомъ, такъ что

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2.$$

Можно также сказать, что пригл. квадр. корень изъ данного числа с точностью до $\frac{1}{n}$, взятый с недостаткомъ, представляет

собой наибольшее кратное дроби $\frac{1}{n}$, квад-

ратъ котораго не превосходитъ даннаго числа.

179. Правило 1. Чтобы найти изъ даннаго числа приближенный квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до 1, извлекаютъ квадратный корень изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа.

Дѣйствительно, пусть, напр., требуется найти приближенный квадратный корень съ точностью до 1 изъ 150½. Для этого извлечемъ квадр. корень изъ наиб. цѣлаго квадрата, заключающагося въ 150; это будетъ 12. Значать, $12^2 < 150 < 13^2$. Разъяснимъ, что это двойное неравенство не нарушится, если къ числу 150 мы добавимъ правильную дробь ½. Дѣйствительно, если $12^2 < 150$, то и подавно $12^2 < 150\frac{1}{2}$. Съ другой стороны, такъ какъ 150 и 13^2 числа цѣлыя и $150 < 13^2$, то, значить, 150 меньше 13^2 на нѣкоторое цѣлое число, по меньшей мѣрѣ, на одну цѣлую единицу; слѣд., если прибавимъ къ 150 дробь ½, которая меньше единицы, то число $150\frac{1}{2}$ останется все-таки меньшимъ, чѣмъ 13^2 . Итакъ, $12^2 < 150\frac{1}{2} < 13^2$. Отсюда слѣдуетъ, что каждое изъ чиселъ 12 и 13 есть приближенный квадратный корень изъ $150\frac{1}{2}$ съ точностью до 1, при чемъ 12 есть приближенный корень съ недостаткомъ, а 13—приближенный корень съ избыткомъ.

Примѣры.

- 1) $\sqrt{5} = 2$ или 3; 2) $\sqrt{5,375} = 2$ или 3;
 3) $\sqrt{\frac{487}{13}} = \sqrt{\frac{37\frac{6}{13}}{13}} = 6$ или 7; 4) $\sqrt{\frac{5}{6}} = 0$ или 1.

Правило 2. Чтобы найти изъ даннаго числа приближенный квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до $\frac{1}{n}$, умножаютъ данное число на n^2 , изъ полученнаго произведенія извлекаютъ квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до 1 и дѣлятъ его на n .

Дѣйствительно, пусть искомые приближенные корни изъ дан-

наго числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$ будутъ дроби $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$. Тогда:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2, \text{ или } \frac{x^2}{n^2} < A < \frac{(x+1)^2}{n^2}.$$

Умноживъ всё члены неравенства на одно и то же число n^2 , мы, очевидно, не измѣнимъ его смысла, т. е. меньшее останется меньшимъ; значить:

$$x^2 < An^2 < (x+1)^2.$$

Изъ этого двойнаго неравенства видно, что числа x и $x+1$ представляютъ собою приближенные квадрат корни съ точностью до 1 изъ произведенія An^2 . Найдя эти корни такъ, какъ было показано раньше, мы получимъ числители дробей $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, а раздѣливъ числители на n , найдемъ и самыя дроби.

Примѣры.

1) Найдти $\sqrt{72}$ съ точностью до $\frac{1}{7}$:

$$72 \cdot 7^2 = 72 \cdot 49 = 3528;$$

$$\sqrt{3528} = 59 \text{ (до 1); } \sqrt{72} = \frac{59}{7} \text{ (до } \frac{1}{7}\text{)}.$$

2) Найдти $\sqrt{2}$ до тысячныхъ долей:

$$2 \cdot 1000^2 = 2000000; \sqrt{2000000} = 1414 \text{ (до 1); } \sqrt{2} = 1,414 \text{ (до } \frac{1}{1000}\text{)}.$$

3) Найдти $\sqrt[3]{\frac{3}{7}}$ съ приближеніемъ до $\frac{1}{1000}$:

$$\frac{3}{7} \cdot 1000^2 = \frac{3000000}{7} = 428571\frac{3}{7}; \sqrt[3]{428571} = 654; \sqrt[3]{\frac{3}{7}} = 0,654 \text{ (до } \frac{1}{1000}\text{)}.$$

4) Найдти $\sqrt{0,3}$ до $\frac{1}{100}$:

$$0,3 \cdot 100^2 = 3000; \sqrt{3000} = 54, \sqrt{0,3} = 0,54 \text{ (до } \frac{1}{100}\text{)}.$$

5) Найдти $\sqrt{0,38472}$ до $\frac{1}{10}$:

$$0,38472 \cdot 10^2 = 38,472; \sqrt{38} = 6; \sqrt{0,38472} = 0,6 \text{ (до } \frac{1}{10}\text{)}.$$

6) Найдти $\sqrt{465}$ съ какимъ-нибудь десятичнымъ приближеніемъ:

$\sqrt{4'65} = 21,56$
4
41 65
1 41
425 240'0
5 2125
4306 27500
6 25836
1664

Сначала извлекаем корень съ точностью до 1; получаемъ 21. Чтобы пайти цифру десятыхъ (иначе сказать, чтобы найти приближенный корень до $\frac{1}{10}$), надо было бы умножить 465 на 10^2 , т.-е. приписать къ 465 два нуля. Очевидно, это все равно, что приписать къ остатку два нуля. Найдя цифру десятыхъ, можем снова приписать къ остатку 2 нуля и искать цифру сотыхъ, и т. д.

Извлечение квадратных корней изъ дробей.

180. Точный квадратный корень изъ несократимой дроби можно извлечь лишь въ томъ случаѣ, когда оба члена дроби суть точные квадраты (§ 163, II). Въ этомъ случаѣ достаточно извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно; напримѣръ:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

Приближенные квадратные корни изъ дробей находятся обыкновенно такъ, какъ указано въ предыдущемъ параграфѣ (см. примѣры 3, 4 и 5). Впрочемъ, можно поступать и иначе. Объяснимъ это на слѣдующихъ 2-хъ примѣрахъ:

1) Найти приближенное значеніе $\sqrt{\frac{5}{24}}$.

Сдѣлаемъ знаменателя точнымъ квадратомъ. Для этого достаточно было бы умножить оба члена дроби на знаменателя; но въ этомъ примѣрѣ можно поступить проще. Разложимъ знаменателя на простыхъ множителей: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Изъ этого разложенія видно, что если 24 умножить на 2 и еще на 3, то тогда въ произведеніи каждый простой множитель будетъ повторяться четное число разъ, и, слѣдов., знаменатель сдѣлается квадратомъ; поэтому

$$\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{2^4 \cdot 3^2}} = \frac{\sqrt{30}}{2^2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Остается вычислить $\sqrt{30}$ съ какою-нибудь точностью и результатъ раздѣлить на 12. При этомъ надо имѣть въ виду, что отъ дѣленія на 12 уменьшится и дробь $\frac{1}{n}$, показывающая степень точности. Такъ, если найдемъ $\sqrt{30}$ съ точностью до $\frac{1}{10}$, то получимъ 5,4 (съ нед.) и 5,5 (съ избыткомъ). Раздѣливъ эти числа на 12, пайдемъ $\frac{5,4}{12}$ (съ нед.) и $\frac{5,5}{12}$ (съ избыткомъ). Это будутъ приближенные квадр. корни изъ дроби $\frac{5}{24}$ съ точностью до $\frac{1}{120}$.

2) Найти приближенное значеніе $\sqrt{0,378}$.

$$\sqrt{0,378} = \sqrt{\frac{378}{1000}} = \sqrt{\frac{3780}{10000}} = \frac{\sqrt{3780}}{100} = \frac{61}{100} \text{ или } \frac{62}{100} \left(\text{до } \frac{1}{100} \right)$$

4. Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочлена.

181. Объясненіе. Въ пѣкоторыхъ случаяхъ квадратный корень изъ многочлена можетъ быть выраженъ въ видѣ многочлена (въ видѣ одночлена онъ не можетъ быть выраженъ, такъ какъ одночленъ въ квадратѣ даетъ одночленъ, а не многочленъ). Покажемъ это на слѣдующемъ примѣрѣ:

$$\sqrt{16a^4b^2 - 24a^3b^3 + 13a^2b^4 - 3ab^5 + \frac{1}{4}b^6}$$

Мы расположили данный многочленъ по убывающимъ степенямъ буквы a , такъ что высшій членъ въ немъ есть первый, а низшій—последній.

Предположимъ, что существуетъ многочленъ, квадратъ котораго равенъ данному многочлену. Пусть этотъ многочленъ тоже расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы a , такъ что высшій членъ въ немъ первый.

Мы знаемъ, что квадратъ многочлена = квадрату 1-го члена + удвоенное произведеніе 1-го чл. на 2-й + квадратъ 2-го члена + удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й + квадратъ 3-го члена, и т. д. Если возвышаемый многочленъ расположенъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, то очевидно, что **высшій членъ въ квадратѣ этого многочлена есть квадратъ перваго его члена.** Въ подкоренномъ многочленѣ высшій членъ есть $16a^4b^2$; значитъ, это и есть квадратъ 1 го

на 2-й и квадрат 2-го члена. Умноживъ на самомъ дѣлѣ $8a^2b - 3ab^2$ на $-3ab^2$, пишемъ произведение подъ остаткомъ и изъ него вычитаемъ (для чего перемѣняемъ знаки у вычитаемого многочлена на обратные); получаемъ второй остатокъ: $+4a^2b^4 - 3ab^5 + \frac{1}{2}b^6$.

Во второмъ остаткѣ должны содержаться: удвоенное произведение суммы первыхъ двухъ членовъ корня на 3-й чл. + квадратъ 3-го члена, и т. д.; другими словами: удвоенное произведение 1-го чл. на 3-й + удвоенное произведение 2-го члена на 3-й + квадратъ 3-го чл., и т. д. Изъ всѣхъ этихъ членовъ высшій есть удвоенное произведение 1-го члена на 3-й; а въ остаткѣ высшій членъ есть $+4a^2b^4$. Значитъ, $4a^2b^4$ и есть удвоенное произведение 1-го члена корня на 3-й его членъ. Поэтому, чтобы найти 3-й членъ корня, достаточно раздѣлить первый членъ второго остатка на удвоенный 1-й членъ корня.

Пишемъ $8a^2b$ за вертикальною чертою и дѣлимъ на это выраженіе $4a^2b^4$; получаемъ $+\frac{1}{2}b^3$; пишемъ этотъ результатъ въ корнѣ на мѣстѣ 3-го члена. Теперь намъ нужно составить удвоенное произведение 1-го члена на 3-й + удвоенное произведение 2-го члена на 3-й + квадратъ 3-го члена и полученную сумму вычесть изъ второго остатка. Чтобы удобнѣе найти эту сумму, къ удвоенному 1-му члену приписываемъ (за вертикальной чертой) удвоенный 2-й членъ и еще 3-й членъ корня (получаемъ $8a^2b - 8ab^2 + \frac{1}{2}b^3$) и образовавшійся отъ этого многочленъ умножаемъ на 3-й членъ, т.-е. на $\frac{1}{2}b^3$; полученное произведение подписываемъ подъ остаткомъ и изъ него вычитаемъ (для чего перемѣняемъ знаки у вычитаемого многочлена).

Въ нашемъ примѣрѣ 3-й остатокъ оказался 0; если бы получился остатокъ, не равный 0, то мы продолжали бы дѣйствіе далѣе, разсуждая такъ, какъ и раньше.

Для перваго члена искомага корня мы взяли лишь одно значеніе $\sqrt{16a^4b^2}$, именно $+4a^2b$; но мы могли бы также взять и $-4a^2b$; въ этомъ случаѣ остальные члены корня тоже перемѣнили бы знаки на противоположные, потому что для полученія ихъ пришлось бы дѣлить первые члены остатковъ не на $8a^2b$, а на $-8a^2b$. Значитъ, квадратный корень изъ многочлена имѣеть два значенія; въ нашемъ примѣрѣ одно $=4a^2b - 3ab^2 + \frac{1}{2}b^3$,

другое $= -4a^2b + 3ab^2 - \frac{1}{2}b^3$; оба эти значенія можно выразить такъ:

$$\pm(4a^2b - 3ab^2 + \frac{1}{2}b^3).$$

Мы могли бы подкоренной многочленъ расположить по возрастающимъ степенямъ главной буквы; члены корня нашлись бы тогда совершенно такъ же, какъ сейчасъ было объяснено; только въ объясненіи слово «высшій» должно замѣнить словомъ «низшій».

182. Правило. Чтобы извлечь квадратный корень изъ многочлена, предварительно располагаютъ его по убывающимъ или по возрастающимъ степенямъ одной и той же буквы.

Извлекаютъ квадратный корень изъ 1-го члена многочлена; полученный результатъ берутъ за 1-й членъ корня.

Возвысивъ этотъ членъ въ квадратъ, вычитаютъ его изъ даннаго многочлена.

Дѣлятъ 1-й членъ перваго остатка на удвоенный первый членъ корня; полученное частное берутъ за 2-й членъ корня.

Приписавъ этотъ членъ къ удвоенному 1-му члену корня, умножаютъ полученный двучленъ на 2-й членъ корня и произведшіе вычитаютъ изъ остатка.

Дѣлятъ 1-й членъ 2-го остатка на удвоенный 1-й членъ корня; полученное частное принимаютъ за 3-й членъ корня.

Приписавъ этотъ членъ къ суммѣ удвоеннаго 1-го члена и удвоеннаго 2-го члена, умножаютъ полученный трехчленъ на 3-й членъ корня и произведение вычитаютъ изъ 2-го остатка.

Продолжаютъ дѣйствіе такъ же и далѣе.

183. Признаки невозможности извлеченія.

1) Если данный многочленъ есть двучленъ, то корень квадратный изъ него не можетъ быть выраженъ многочленомъ, такъ какъ всякій многочленъ въ квадратѣ даетъ по меньшей мѣрѣ 3 члена, а не 2.

2) Если высшій или низшій члены многочлена не представляютъ собою точныхъ квадратовъ, то корень квадратный изъ многочлена не можетъ быть выраженъ многочленомъ.

Это прямо слѣдуетъ изъ правила нахождения высшаго и низшаго членовъ корня.

3) Если высшій и низшій члены многочлена точные квадраты,

то возможность или невозможность извлечения корня обнаружится посредством самого дѣйствія; при этомъ если многочленъ расположенъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, то продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ не получится 0, или пока не получится остатокъ, у котораго первый членъ не дѣлится на удвоенный первый членъ корня; въ последнемъ случаѣ извлеченіе невозможно. Если же многочленъ расположенъ по возрастающимъ степенямъ главной буквы, то, вычисливъ предварительно послѣдній членъ корня (который равенъ корню квадратному изъ послѣдняго члена многочлена), продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока въ корнѣ не получится членъ, у котораго показатель главной буквы равенъ показателю этой буквы въ вычисленномъ послѣднемъ членѣ корня, или болѣе его; если при этомъ есть остатокъ, то извлеченіе невозможно.

184. Замѣчаніе. Когда изъ даннаго многочлена нельзя извлечь точнаго квадратнаго корня, все-таки иногда бываетъ полезно начать извлеченіе съ тѣмъ, чтобы, прекративъ его на какомъ-нибудь членѣ корня, представить данный многочленъ въ видѣ суммы квадрата съ остаткомъ отъ извлеченія. Напримѣръ:

$$\begin{array}{r} \sqrt{x^4 - 4x^3 + 3} = x^2 - 2x \\ -x^4 \\ \hline 2x^2 - 2x \quad | \quad -4x^3 + 3 \\ -2x \quad | \quad +4x^3 - 4x^2 \\ \hline \quad \quad \quad -4x^2 + 3. \end{array}$$

Прекративъ извлеченіе на второмъ членѣ корня, можемъ написать:

$$x^4 - 4x^3 + 3 = (x^2 - 2x)^2 + (-4x^2 + 3) = (x^2 - 2x)^2 - 4x^2 + 3.$$

ГЛАВА V.

Извлеченіе ариѳметическаго кубическаго корня.

1. Извлеченіе кубическаго корня изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ данномъ числѣ.

185 Предварительное замѣчаніе. Если возвысимъ въ кубъ числа натуральнаго ряда: 1, 2, 3, 4, 5..., то получимъ безконечный рядъ кубовъ:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000...

(изъ нихъ первые 10 надо заучить наизусть).

Очевидно, что всякое цѣлое число, не находящееся въ этомъ ряду (напр., 500), не можетъ быть кубомъ цѣлаго числа; въ такомъ случаѣ оно не можетъ быть и кубомъ дроби (§ 163). Значитъ, изъ такого числа нельзя извлечь кубическаго корня. Но мы условимся, что если требуется извлечь кубическій корень изъ какого-нибудь цѣлаго числа, то его надо понимать въ томъ смыслѣ, что требуется извлечь кубическій корень или изъ самаго числа (если оно окажется кубомъ цѣлаго числа), или же изъ наибольшаго куба цѣлаго числа, какой заключается въ данномъ числѣ.

186 Число цифръ въ корнѣ. Легко опредѣлить заранѣе, сколько цифръ въ кубическомъ корнѣ изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ данномъ числѣ, напр., въ числѣ 571810. Для этого примемъ во вниманіе слѣдующую таблицу:

$$1^3=1, 10^3=1000, 100^3=1000000, 1000^3=1000000000, \text{ и т. д.}$$

Такъ какъ 571810 меньше 1000000, то наибольшій кубъ, заключающійся въ этомъ числѣ, меньше 100^3 ; съ другой стороны, такъ какъ 571810 больше 1000, то наибольшій кубъ, заключающійся въ этомъ числѣ, больше (или равенъ) 10^3 . Значитъ, кубическій корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ 571810, долженъ быть менѣе 100 и болѣе (или равенъ) 10, т.-е. онъ долженъ состоять изъ двухъ цифръ.

Подобными разсужденіями мы можемъ опредѣлить число цифръ кубическаго корня изъ всякаго даннаго числа. Ниже (§ 191) мы укажемъ для этого болѣе простой способъ.

Если данное число болѣе 1000, то кубическій корень изъ него болѣе (или равенъ) 10 и, слѣдов., состоитъ изъ двухъ или болѣе цифръ. Изъ сколькихъ бы цифръ онъ ни состоялъ, условимся разсматривать его какъ сумму только десятковъ и единицъ.

187. Свойство числа десятковъ корня. Пусть требуется извлечь куб. корень изъ какого-нибудь числа, большаго 1000, напр

изъ 571810. Предположимъ, что въ искомомъ корнѣ десятокъ будетъ x (число это можетъ быть однозначное или многозначное, все равно), а единиць y ; тогда искомый корень выразится $10x+y$, слѣдов.:

$$571810 = (10x+y)^3 + \text{ост} = 1000x^3 + 3 \cdot 100x^2y + 3 \cdot 10xy^2 + y^3 + \text{ост}.$$

Чтобы найти число x , возьмемъ изъ обѣихъ частей этого равенства однѣ только тысячи. Въ лѣвой части этого равенства находится 571 тысяча, а въ правой тысячь или x^3 , или болѣе (если тысячи окажутся въ суммѣ 4-хъ послѣднихъ членовъ); поэтому

$$571 \geq x^3 \text{ и слѣд.: } x^3 \leq 571.$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ, что x^3 есть одинъ изъ цѣлыхъ кубовъ, заключающихся въ 571. Докажемъ, что за x^3 надо взять наибольшій изъ этихъ кубовъ, т.-е. 512. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы взяли за x^3 не 512, а, положимъ, 343, то x равнялся бы 7, а потому искомый корень былъ бы 7 десятковъ съ единицами. Но 7 десятковъ съ единицами (хотя бы единиць было и 9) меньше 8 десятковъ, а 8 десятковъ въ кубѣ составляютъ только 512 тысячь, что меньше даннаго числа; поэтому мы не можемъ взять 7 десятковъ съ единицами, когда и 8 десятковъ оказывается не много.

Если же $x^3 = 512$, то $x = \sqrt[3]{512} = 8$.

Откуда слѣдуетъ: число десятковъ искомага корня (будетъ ли это число однозначнымъ или многозначнымъ) равно куб. корню изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ числѣ тысячъ даннаго числа.

Когда данное число, какъ взятое нами, меньше 1000000, тогда число тысячь въ немъ меньше 1000; въ этомъ случаѣ десятки корня легко найдутся по таблицѣ кубовъ первыхъ 9 чиселъ.

188. Свойство числа единицъ корня. Найдя десятки корня, вычислимъ членъ $1000x^3$ и вычтемъ изъ даннаго числа; тогда получимъ первый остатокъ. Чтобы найти его, достаточно вычесть x^3 , т.-е. 512, изъ 571 и къ остатку снести остальные три цифры:

$$\begin{array}{r} 571810 \\ -512 \\ \hline 59810 = 3 \cdot 100x^2y + 3 \cdot 10xy^2 + y^3 + \text{ост.} \end{array}$$

Чтобы найти y , возьмемъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства только однѣ сотни. Въ лѣвой части сотенъ 598, а въ правой $3x^2y$ или больше (если сотни окажутся въ суммѣ послѣднихъ трехъ членовъ), поэтому:

$$598 \geq 3x^2y; \text{ и слѣд. } 3x^2y \leq 598, \text{ поэтому } y < \frac{598}{3x^2},$$

т.-е. число единицъ корня или равно цѣлому частному отъ дѣленія числа сотенъ перваго остатка на утроенный квадратъ числа десятковъ корня, или меньше этого частного.

Подставивъ вмѣсто x найденное для него число 8, получимъ:

$$y < \frac{598}{3 \cdot 6^3} = \frac{598}{192} = 3 \frac{22}{192} = 3 \frac{11}{96}.$$

Отсюда видно, что y есть или 3, или 2, или 1, или 0. Чтобы опредѣлить, какое изъ этихъ чиселъ надо взять за y , испытаемъ сначала большую цифру, т. е. 3. Для этого вычислимъ сумму членовъ: $3 \cdot 100x^2y + 3 \cdot 10xy^2 + y^3$ при $x=8$ и $y=3$, если получится число, не большее перваго остатка 59810, то испытуемая цифра годится; въ противномъ случаѣ надо испытать слѣдующую меньшую цифру:

$$\begin{array}{r} 3x^2y \cdot 100 = 3 \cdot 64 \cdot 3 \cdot 100 = 57600 \\ 3xy^2 \cdot 10 = 3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2160 \\ \underline{y^3 = 27} \\ 59787 \end{array}$$

Испытуемая цифра годится. Искомый корень 83. Чтобы найти окончательный остатокъ отъ извлеченія, надо изъ 59810 вычесть 59787; послѣ вычитанія получимъ 23, вслѣдствіе чего можно написать:

$$571810 = 83^3 + 23.$$

Вычисляя члены $3x^2y \cdot 100$ и $3xy^2 \cdot 10$, мы можемъ не писать на концѣ нулей, а только, при подписываннн слагаемыхъ другъ подъ другомъ, имѣть въ виду, что произведеніе $3x^2y$ означаетъ сотни, а $3xy^2$ —десятки.

189. Извлеченіе кубическаго корня, состоящаго изъ одной или двухъ цифръ. Если данное число меньше 1000, то куб. корень изъ него выражается одною цифрою, и тогда онъ находится по таблицѣ кубовъ первыхъ 9 чиселъ.

Если же данное число, напр., 581810, болѣе 1000, но менѣе 1000000, то куб. корень изъ него выражается 2 цифрами. Согласно сказанному выше, цифры эти всего удобнѣе находить такимъ образомъ: отдѣливъ

$$\sqrt[3]{571'810} = 83$$

512

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 8^3 = 192 \quad \underline{597'10} \\ 3 \cdot 8^2 \cdot 3 = \quad \underline{576} \\ 3 \cdot 8 \cdot 3^2 = \quad \underline{216} \\ 3^3 = \quad \underline{27} \\ \hline 59787 \\ \hline 23 \end{array}$$

въ данномъ числѣ тысячи (571), извлекаютъ куб. корень изъ наибольшаго цѣлага куба, заключающагося въ числѣ ихъ. Полученное число пишутъ въ корнѣ; это будутъ десятки искомаго корня. Возвмемъ найденное число въ кубъ, вычитаютъ результатъ изъ числа тысячъ даннаго числа; къ остатку (59) сносятъ остальные три цифры подкореннаго числа. Отдѣляютъ въ этомъ остаткѣ сотни; надѣво отъ него проводятъ вертикальную

черту, за которой пишутъ утроенный квадратъ числа десятковъ корня. На это число дѣлятъ число сотенъ остатка. Полученную цифру (3) подвергаютъ испытанію. Для этого вычисляютъ отдѣльно три слагаемыхъ: утроенное произведеніе квадрата десятковъ на единицы, утроенное произведеніе десятковъ на квадратъ единицъ и кубъ единицъ. Подписавъ эти слагаемыя

другъ подъ другомъ (при чемъ второе и третье сдвигаютъ на одно мѣсто вправо), находятъ ихъ сумму (59787). Если эта сумма оказывается не болѣе остатка, то ее вычитаютъ изъ него; въ противномъ случаѣ подвергаютъ испытанію слѣдующую меньшую цифру.

190. Извлеченіе кубическаго корня, состоящаго изъ трехъ или болѣе цифръ. Пусть требуется извлечь куб. корень изъ числа, большаго милліона, напр., изъ 53820756. Куб. корень изъ такого числа болѣе (или равенъ) 100 и потому состоитъ изъ 3 или болѣе цифръ. Мы однако можемъ его разсматривать, какъ состоящій только изъ десятковъ и единиць. Чтобы найти десятки корня, надо, по доказанному, извлечь куб. корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ числѣ тысячъ даннаго числа, т.-е. въ 53820. Такъ какъ это число менѣе 1000000, то корень изъ него найдемъ описаннымъ ранѣе приемомъ:

$$\sqrt[3]{53820756} = 377$$

3 . 3 ³ = 27	268	20	{	Цифры 9 и 8, по испытаніи ихъ, оказываются велики. Такимъ образомъ, въ иско- момъ корнѣ оказывается 37 десятковъ.
3 . 3 ³ . 7 =	189			
3 . 3 . 7 ³ =	441			
7 ³ =	343			
	236	53		
3 . 37 ³ = 4107	31677	56		
3 . 37 ³ . 7 =	28749			
3 . 37 . 7 ³ =	5439			
7 ³ =	343			
	2929633			
	238128			

Чтобы найти единицы корня, надо, по доказанному прежде, найти предварительно первый остатокъ, т.-е. изъ даннаго числа вычесть кубъ десятковъ, т.-е. 37³. 1000. Для этого достаточно изъ 53820 вычесть 37³ и къ остатку приписать послѣднія три цифры даннаго числа, т.-е. 756. Остатокъ отъ вычитанія 37³ изъ 53820 у насъ уже есть, именно 3167. Припишемъ къ этому числу цифры 756; получимъ остатокъ 3.67756 отъ вычитанія 37³. 1000 изъ всего даннаго числа. Отдѣлимъ въ этомъ остаткѣ сотни и раздѣлимъ число ихъ на 3 . 37³, тогда получимъ, по показанному, число, или равное числу единицъ корня, или большее его. Испытаніемъ убѣдимся, какая цифра будетъ надлежащая. Дѣйствіе можно продолжать тамъ же, гдѣ мы находили десятки корня.

Вообще, чтобы извлечь куб. корень изъ какого угодно большаго числа, надо сначала извлечь куб. корень изъ числа его тысячъ. Если это число болѣе 1000, то придется извлекать куб. корень изъ числа тысячъ этихъ тысячъ, т.-е. изъ милліоновъ даннаго числа; если и это число болѣе 1000, то придется извлекать корень изъ числа тысячъ милліоновъ, т.-е. изъ билліоновъ даннаго числа, и т. д.

Правило. Чтобы извлечь куб. корень изъ даннаго числа, разбиваютъ его, отъ правой руки къ лѣвой, на грани, по три цифры въ каждой, кромѣ послѣдней, въ которой можетъ быть одна или двѣ цифры. Чтобы найти первую цифру корня, надо извлечь куб. корень изъ первой грани. Чтобы найти вторую цифру, надо изъ первой грани вычесть кубъ второй цифры корня къ остатку снести вторую грань и число сотенъ получившагося числа раздѣлить на утроенный квадратъ найденной цифры корня; полученное отъ дѣленія число надо испытать. Слѣдующія цифры корня находятся по тому же приему.

Если послѣ снесенія грани число сотенъ получившагося числа окажется меньше дѣлителя, т.-е. утроеннаго квадрата найденной части корня, то въ корнѣ ставить нуль и сносить слѣдующую грань.

191. Число цифръ корня. Изъ разсмотрѣнія способа нахождения цифръ кубическаго корня слѣдуетъ, что въ кубическомъ корнѣ столько цифръ, сколько въ подкоренномъ числѣ граней, по три цифры каждая, кромѣ одной, которая можетъ имѣть и двѣ цифры, и одну.

2. Извлеченіе приближенныхъ кубическихъ корней.

192. Точные и неточные кубы. Числа, изъ которыхъ кубическій корень можетъ быть выраженъ цѣлымъ или дробнымъ числомъ, наз. точными кубами; всѣ остальные числа называются неточными кубами. Неточными кубами оказываются, во-1-хъ, всѣ тѣ цѣлыя числа, которыя не представляютъ собою кубовъ цѣлыхъ чиселъ, и, во-2-хъ, всѣ тѣ дроби, у которыхъ хотя бы одинъ членъ не есть кубъ цѣлаго числа.

Изъ неточныхъ кубовъ можно извлекать только такъ-называемые приближенные кубические корни, опредѣляемые слѣдующимъ образомъ.

193. Опредѣленіе приближенныхъ кубическихъ корней.

1) Приближеннымъ кубическимъ корнемъ изъ даннаго числа (цѣлаго или дробнаго) съ точностью до 1 наз. каждое изъ двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, между кубами которыхъ заключается данное число и которыя различаются одно отъ другого на 1; меньшее изъ этихъ чиселъ называется приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ, а большее—приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ.

Такъ, если A есть данное число, то приближенные кубические корни изъ A съ точностью до 1 будутъ два такіа цѣлыя числа x и $x+1$, которыя удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$x^3 < A < (x+1)^3.$$

2) Приближеннымъ кубичнымъ корнемъ изъ даннаго числа (цѣлаго или дробнаго) съ точностью до $\frac{1}{n}$ наз. каждая изъ двухъ такихъ дробей съ знаменателемъ n , между кубами когорыхъ заключается данное число и которыя различаются одно отъ другого на $\frac{1}{n}$, меньшая изъ этихъ дробей наз. приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ, а большая—приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ.

Такъ, если данное число есть A , то приближенные кубичные корни изъ A съ точностью до $\frac{1}{n}$ будутъ двѣ такія дроби $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, которыя удовлетворяютъ двойному неравенству:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^3 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^3$$

194. Правило 1. Чтобы найти изъ даннаго числа приближенный кубичный корень съ недостаткомъ, съ точностью до 1, извлекаютъ кубичный корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа.

Пусть, напр., требуется найти приближенный куб. корень, съ точностью до 1, изъ числа 500,6. Для этого находимъ куб. корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ 500, это есть 7. Такъ какъ $7^3 < 500$, то, и подавно, $7^3 < 500,6$, съ другой стороны, $8^3 > 500$, и такъ какъ 0,6 не составляютъ ни одной цѣлой единицы, то $8^3 > 500,6$. Слѣд., каждое изъ чиселъ: 7 и 8 есть приближенный куб. корень съ точностью до 1 изъ числа 500,6, первое есть приближенный куб. корень съ недостаткомъ, второе—съ избыткомъ.

Примѣры.

$$1) \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0 \text{ или } 1 \text{ (до } 1) \quad 2) \sqrt[3]{560\frac{7}{8}} = 8 \text{ или } 9 \text{ (до } 1);$$

$$3) \sqrt[3]{\frac{3846}{17}} \rightarrow \sqrt[3]{226\frac{4}{17}} = 6 \text{ или } 7 \text{ (до } 1).$$

Правило 2. Чтобы найти изъ даннаго числа приближенный кубичный корень съ недостаткомъ, съ точностью до $\frac{1}{n}$, умножаютъ данное число на n^3 , изъ полученнаго произведенія извлекаютъ кубичный корень съ недостаткомъ, съ точностью до 1, и дѣлятъ его на n .

Дѣйствительно, пусть искомые приближенные корни изъ даннаго числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$ будутъ $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$. Согласно опредѣленію, эти дроби

должны удовлетворять двойному неравенству:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^3 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^3 \text{ или } \frac{x^3}{n^3} < A < \frac{(x+1)^3}{n^3}.$$

Умноживъ всё члены неравенства на n^3 , получимъ:

$$x^3 < An^3 < (x+1)^3.$$

Изъ этого неравенства видно, что числа x и $x+1$ суть приближенные кубичные корни изъ числа An^3 , съ точностью до 1. Найдя эти корни такъ, какъ было указано ранѣе, мы получимъ числителей дробей $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, а раздѣливъ ихъ на n , найдемъ и самыя дроби.

Примѣры.

1) Найти $\sqrt[3]{5}$ съ точностью до $\frac{1}{8}$.

$$5 \cdot 8^3 = 2560, \sqrt[3]{2560} = 13 \text{ или } 14 \text{ (до 1); } \sqrt[3]{5} = \frac{13}{8} \text{ или } \frac{14}{8} \text{ (до } \frac{1}{8}\text{)}.$$

2) Найти $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ до сотыхъ долей.

$$\frac{4}{9} \cdot 100^3 = 444444 \frac{4}{9}; \sqrt[3]{444444} = 76 \text{ или } 77, \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = 0,76 \text{ или } 0,77 \text{ (до } 0,01\text{)}.$$

3) Найти $\sqrt[3]{2}$ съ десятичнымъ приближеніемъ.

$$\sqrt[3]{2} = 1,25 \dots$$

3 . 1 ³ = 3	1	
3 . 1 ² . 2 =	6	10'00
3 . 1 . 2 ² =	12	
2 ³ =	8	
	728	
3 . 12 ² = 432	2720'00	
3 . 1 . 2 ³ . 5 =	2160	
3 . 12 . 5 ² =	900	
5 ³ =	125	
	225125	
	46875	

Сначала извлекаемъ корень съ точностью до 1 это будетъ 1. Чтобы найти цифру десятыхъ, надо было бы умножить 2 на 10³, т.-е. къ 2 приписать три нуля. Очевидно, это все равно, что приписать къ остатку три нуля. Найдя цифру десятыхъ, можемъ снова приписать къ остатку три нуля и искать цифру сотыхъ, и т. д.

3. Извлеченіе кубичныхъ корней изъ дробей.

195. Точный куб. корень изъ несократимой дроби можно извлечь лишь въ томъ случаѣ, когда оба члена дроби точные кубы (§ 163, II). Въ этомъ

случай достаточно извлечь корень из числителя и знаменателя отдельно; напр.:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}.$$

Приближенные куб. корни из дробей обыкновенно находятся такъ, какъ указано въ предыдущемъ параграфѣ (примѣръ 2). Впрочемъ, можно поступать иначе. Объяснимъ это на слѣдующемъ примѣрѣ:

Найти приближенное значеніе $\sqrt[3]{\frac{5}{24}}$.

Изъ разложенія $24=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ видимъ, что если оба члена дроби умножимъ на 3^3 , то сдѣлаемъ знаменателя точнымъ кубомъ; сдѣлавъ это, извлечемъ корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{24}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 3^3}{24 \cdot 3^3}} = \sqrt[3]{\frac{45}{2^3 \cdot 3^3}} = \frac{\sqrt[3]{45}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt[3]{45}}{6}.$$

Найдя $\sqrt[3]{45}$ съ какою-нибудь точностью до $\frac{1}{n}$ и раздѣливъ результатъ на 6, мы получимъ приближенный куб. корень изъ дроби $\frac{5}{24}$ съ точностью до $\frac{1}{6n}$.

ГЛАВА VI.

Понятіе о несоизмѣримомъ числѣ.

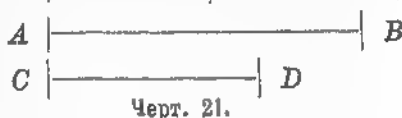
196. Соизмѣримыя и несоизмѣримыя значенія величинъ. Общую мѣру двухъ значеній одной и той же величины (напр., двухъ длинъ, двухъ угловъ, двухъ вѣсовъ и т. п.) наз. такое значеніе этой же величины, которое въ каждомъ изъ нихъ содержится цѣлое число разъ.

Нахожденіе общей мѣры производится способомъ послѣдовательнаго дѣленія такъ, какъ это указывается въ геометріи для двухъ отрѣзковъ прямой. Въ геометріи же доказывается, что существуютъ такіе отрѣзки прямой, которые не имѣютъ общей мѣры; таковы, напр., основаніе и боковая сторона равнобедреннаго треугольника,

у котораго углы при основаніи равны $36^\circ (= \frac{2}{5}d)$, или диагональ и сторона квадрата. Соответственно этому мы можем представить себѣ, что и другія величины могутъ получать значенія, не имѣющія общей мѣры.

Два значенія одной и той же величины называются соизмѣримыми, если они имѣютъ общую мѣру, и несоизмѣримыми, если такой мѣры они не имѣютъ.

197. Понятіе объ измѣреніи. Чтобы избѣжать излишней отвличенности, мы будемъ говорить, какъ въ этомъ параграфѣ, такъ и въ послѣдующихъ, не о величинахъ вообще, а объ одной наиболѣе простой величинѣ—именно, о длинѣ отрѣзка прямой.



Пусть требуется измѣрить

длину отрѣзка AB при помощи единицы длины CD (черт. 21). Различимъ тогда 2 возможныхъ случая:

1-й случай, когда отрѣзокъ AB соизмѣримъ съ единицей CD , т.-е. когда существуетъ общая мѣра отрѣзковъ AB и CD . Если окажется, что общей мѣрой будетъ сама единица CD и она въ AB содержится m разъ, то результатъ измѣренія выразится цѣлымъ числомъ m ($AB = mCD$); если же общей мѣрой окажется нѣкоторая $\frac{1}{n}$ доля CD , которая въ AB содержится m разъ, то результатъ измѣренія выразится дробью $\frac{m}{n}$ (т.-е. $AB = \frac{m}{n}CD$). Значитъ, въ рассматриваемомъ случаѣ мы всегда можемъ получить точный результатъ измѣренія, т.-е. всегда можемъ получить такое цѣлое или дробное число, которое въ точности выражаетъ длину AB въ единицѣ CD . Объ этомъ числѣ мы будемъ говорить, что оно измѣряетъ отрѣзокъ AB (или служитъ ему мѣрою).

2-й случай, когда отрѣзокъ AB несоизмѣримъ съ единицей CD , т.-е., когда не существуетъ общей мѣры AB и CD . Въ этомъ случаѣ мы не можемъ получить точнаго результата измѣренія въ видѣ цѣлаго или дробнаго

числа. Дѣйствительно, если предположимъ, что отрѣзокъ AB въ точности равняется $\frac{m}{n} CD$, то это значило бы, что $\frac{1}{n}$ доля CD содержится въ AB ровно m разъ; тогда, значить, эта доля была бы общою мѣрою AB и CD . Поэтому, въ томъ случаѣ, когда такой мѣры не существуетъ, точнаго результата измѣренія при помощи цѣлыхъ или дробныхъ чиселъ мы получить не можемъ.

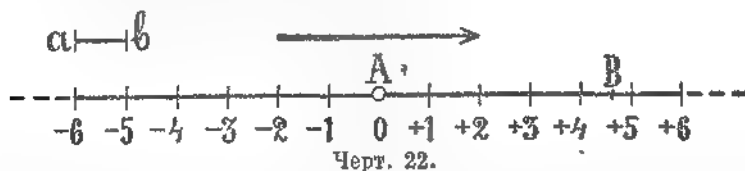
Но тогда мы можемъ находить приближенные результаты измѣренія и притомъ съ какою угодно точностью. Положимъ, напр., что мы желаемъ найти приближенный результатъ измѣренія съ точностью до $\frac{1}{100}$

(и вообще до $\frac{1}{n}$). Тогда, раздѣливъ единицу CD на 100 (вообще на n) равныхъ частей, станемъ откладывать на AB одну такую часть столько разъ, сколько можно. Пусть окажется, что она укладывается въ AB болѣе 123 разъ, но менѣе 124 разъ (вообще болѣе m разъ, но менѣе $m+1$ разъ). Тогда каждое изъ чиселъ $\frac{123}{100}$ и $\frac{124}{100}$ (вообще $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$) можно назвать приближеннымъ результатомъ измѣренія отрѣзка AB , первое число — съ недостаткомъ, а второе — съ избыткомъ.

Замѣтимъ, что этимъ путемъ мы можемъ находить приближенные результаты измѣренія и въ случаѣ 1-мъ, т.-е. когда измѣряемый отрѣзокъ AB соизмѣримъ съ единицею CD ; только въ этомъ случаѣ мы можемъ найти также и точный результатъ, если пожелаемъ, тогда какъ въ случаѣ 2-мъ такого результата мы никогда не получимъ.

198. Соответствіе между числами и точками прямой. Для лучшаго представленія всего того, что мы будемъ говорить далѣе, мы обратимся къ наглядному способу изображенія чиселъ помощью направленных отрѣзковъ прямой, къ способу, къ которому мы уже прибѣгали въ началѣ алгебры (§14), когда говорили о числахъ положительныхъ и отрицательныхъ. Для этого возьмемъ безконечную въ обѣ стороны прямую (черт. 22), на которой какую-нибудь точку A

прямемъ за начало отръзковъ; кромѣ того, условимся, какое изъ двухъ направленій этой прямой считать положительнымъ и какое отрицательнымъ (за положительное направленіе мы будемъ всегда принимать направленіе слѣва направо, указанное на чертежѣ стрѣлкой). Такую прямую мы уже условились (§ 14) называть ч и с л о в о ю п р я м о ю. При данной единицѣ длины ab (указанной на чертежѣ) каждому числу p , цѣлому или дробному, положительному или отрицательному, соответствуетъ на числовой прямой опредѣленная точка, представляющая собою конецъ того соизмѣряемаго съ ab отръзка, который измѣряется этимъ числомъ p и отложенъ на числовой прямой отъ начальной точки A вправо отъ нея, если число p положительное, и влѣво, если оно отрицательное. На нашемъ чертежѣ, напр., указаны точки, соответствующія цѣлымъ числамъ: $+1, +2, +3, \dots -1, -2, -3, \dots$; дробнымъ числамъ соответствуютъ промежуточные точки.



Но если всякому числу p мы можемъ найти соответствующую точку на числовой прямой, то нельзя сказать обратно, чтобы всякой точкѣ этой прямой мы могли найти соответствующее число. Если случится, что взятая на прямой точка, напр., B (черт. 22), есть конецъ такого отръзка AB , который не соизмѣримъ съ единицею ab , то такой точкѣ не будетъ соответствовать никакого числа, такъ какъ несоизмѣримый отръзокъ AB точно не выражается ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ.

199. Понятіе о несоизмѣримомъ числѣ. Чтобы установить соответствіе между числами и всѣми точками числовой прямой и такимъ образомъ получить возможность выражать числами не одни только соизмѣримые съ единицею отръзки прямой, но и несоизмѣримые, надо расширить область чиселъ, введя въ нее, сверхъ тѣхъ чиселъ, которыя мы рассматривали до сего времени, еще числа особаго рода, кото-

рыя мы примемъ за мѣру несоизмѣримыхъ съ единицею значеній величины. Числа эти мы будемъ называть несоизмѣримыми (или ирраціональными), а числа цѣлыя и дробныя, которыя мы знали до сего времени, будемъ называть соизмѣримыми (или раціональными).

Мы не будемъ устанавливать здѣсь вполнѣ строгаго опредѣленія несоизмѣримыхъ чиселъ и дѣйствій надъ ними ¹⁾! Ограничимся сообщеніемъ только самыхъ необходимыхъ свѣдѣній.

Допускаютъ, что при данной единицѣ длины каждой точкѣ B числовой прямой (черт. 22) соответствуетъ опредѣленное число, принимаемое за мѣру того отрѣзка AB , концомъ котораго служитъ эта точка B . Если отрѣзокъ AB соизмѣримъ съ единицею длины, то точкѣ B соответствуетъ соизмѣримое число; если же онъ несоизмѣримъ съ единицею длины, то точкѣ B соответствуетъ пѣкоторое несоизмѣримое число, которое нельзя точно выразить цифрами, но можно обозначить какимъ-нибудь знакомъ, напр., одною изъ буквъ греческаго алфавита: $\alpha, \beta, \gamma \dots$

Каждый приближенный результатъ измѣренія несоизмѣримаго отрѣзка AB , которому мѣрою служитъ несоизмѣримое число α , мы будемъ называть приближеннымъ значеніемъ этого числа α . Такъ, если, измѣривъ отрѣзокъ AB съ точностью

до $\frac{1}{n}$, мы получили числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, то каждое изъ нихъ мы на-

зовемъ приближеннымъ значеніемъ числа α съ точностью до

$\frac{1}{n}$. Такъ какъ число $\frac{m}{n}$ измѣряетъ соизмѣримый отрѣзокъ, мень-

шій AB , а число $\frac{m+1}{n}$ измѣряетъ соизмѣримый отрѣзокъ, большій

AB , то несоизмѣримое число α , принимаемое нами за мѣру отрѣзка AB , мы условимся считать большимъ соизмѣримаго

числа $\frac{m}{n}$ и меньшимъ соизмѣримаго числа $\frac{m+1}{n}$. Вслѣдствіе

этого изъ двухъ чиселъ: $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ первое мы будемъ называть

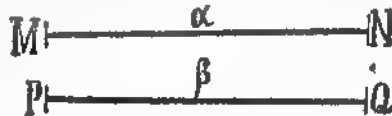
¹⁾ Это сдѣлано въ особомъ Приложеніи, помѣщенномъ въ концѣ этой книги.

приближеннымъ значеніемъ несоизмѣримаго числа α съ недостаткомъ, а второе приближеннымъ значеніемъ этого числа съ избыткомъ.

Несоизмѣримое число α мы будемъ считать известнымъ, если указанъ способъ, посредствомъ котораго можно находить приближенныя значенія этого числа съ любой степенью точности (примѣръ, этому мы вскорѣ увидимъ).

Число (соизмѣримое или несоизмѣримое) считается положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, измѣряетъ ли оно отрѣзокъ прямой, имѣющей положительное направленіе, или отрицательное; на числовой прямой (черт. 22) положительнымъ числамъ соответствуютъ точки, лежащія направо отъ начальной точки A , а отрицательнымъ числамъ соответствуютъ точки, расположенныя на лѣво отъ A . Отрицательныя несоизмѣримыя числа, такъ же какъ и соизмѣримыя, выражаются посредствомъ знака минусъ, поставленнаго передъ абсолютной величиной числа, а положительныя числа посредствомъ знака плюсъ (или совсѣмъ безъ знака).

200. Равенство и неравенство чиселъ. Два числа α и β (соизмѣримыя или несоизмѣримыя) считаются равными и, если, при одной и той же единицѣ длины, они служатъ мѣрою двухъ равныхъ отрѣзковъ прямой (черт. 23) MN и PQ . Если же отрѣзокъ MN , измѣряемый числомъ α , больше (или меньше) отрѣзка PQ , измѣряемаго числомъ β (при той же единицѣ длины), то число α считается большимъ (или меньшимъ) числа β .



Черт. 23.

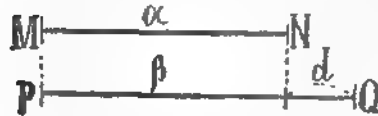
Полезно замѣтить слѣдующій признакъ равенства несоизмѣримыхъ чиселъ ¹⁾:

несоизмѣримыя числа α и β равны, если ихъ приближенныя значенія, взятыя оба съ недостаткомъ, или оба съ избыткомъ,

¹⁾ Этотъ признакъ применяется въ геометріи для опредѣленія равенства несоизмѣримыхъ отношеній.

и вычисленные съ произвольною, по одной какой-либо точности, оказываются постоянно другъ другу равными.

Чтобы убедиться въ этомъ, предположимъ, что числа α и β равны, пусть, напр., $\alpha < \beta$. Тогда отрезокъ MN (черт. 24),



Черт. 24.

измѣряемый числомъ α , меньше отрезка PQ , измѣряемаго числомъ β . Положимъ, что разность $PQ - MN$ равна d . Возьмемъ

такую $\frac{1}{n}$ долю единицы длины,

которая была бы меньше d (что всегда возможно, какъ бы мала длина d ни была), и найдемъ прил. результаты измѣренія отрезковъ MN и PQ съ точностью до этой доли единицы. Очевидно, что такая доля, содержась въ d по крайней мѣрѣ 1 разъ, содержится въ PQ большее число разъ, чѣмъ въ MN ; значить, тогда прил. результатъ измѣренія отрезка MN будетъ меньше прил. результата измѣренія отрезка PQ (если оба результата взяты съ недостаткомъ, или оба съ избыткомъ). Но эти результаты измѣренія суть вмѣстѣ съ тѣмъ и прил. значенія, съ

точностью до $\frac{1}{n}$, чиселъ α и β . Значить, если $\alpha < \beta$, то, начиная съ некотораго достаточно большого значенія знаменателя n въ дроби $\frac{1}{n}$, прил. значеніе числа α окажется меньшимъ прил.

значенія числа β (если оба значенія взяты съ недостаткомъ, или оба съ избыткомъ). Поэтому въ томъ случаѣ, когда прил. значенія чиселъ α и β равны другъ другу при всякой степени точности, мы должны заключить, что эти числа равны.

201. Дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ будутъ данныя положительныя несоизмѣримыя числа. Обозначимъ соответственно черезъ a, b, c, \dots какія угодно приближенныя значенія этихъ чиселъ, взятые съ недостаткомъ, и черезъ A, B, C, \dots какія угодно приближенныя значенія ихъ, взятые съ избыт-

комъ. Тогда мы можемъ высказать слѣдующія опредѣленія дѣйствиій надъ несоизмѣримыми числами.

1°. Сложить числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ значитъ найти число, которое было бы больше каждой суммы $\alpha + \beta + \gamma + \dots$ и меньше каждой суммы $A + B + C + \dots$.

Положимъ, напр., что рѣчь идетъ о двухъ числахъ α и β , которыхъ десятичныя приближенныя значенія, взятые съ недостаткомъ, будутъ слѣдующія ¹⁾:

	до 0,1	до 0,01	до 0,001	до 0,0001	...
Для числа α	1,7	1,73	1,732	1,7320	...
Для числа β	1,4	1,41	1,414	1,4142	...

(Соотвѣтствующія приближенныя значенія съ избыткомъ получаются изъ этихъ чиселъ посредствомъ увеличенія послѣдняго десятичнаго знака на 1).

Тогда сложить α и β значитъ найти число, которое было бы

больше каждой изъ суммъ:	и меньше каждой изъ суммъ:
1,7 + 1,4..... = 3,1	1,8 + 1,5..... = 3,3
1,73 + 1,41..... = 3,14	1,74 + 1,42..... = 3,16
1,732 + 1,414... = 3,146	1,733 + 1,415... = 3,148
1,7320 + 1,4142 = 3,1462	1,7321 + 1,4143 = 3,1464
.....

2°. Перемножить числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ значитъ найти число, которое было бы больше каждого произведенія abc, \dots и меньше каждого произведенія ABC, \dots ²⁾.

Такъ, беря приближенныя значенія чиселъ α и β , указанныя выше, мы можемъ сказать, что произведеніе $\alpha\beta$ представляеть собою число, которое

¹⁾ Взяты приближенныя значенія чиселъ: $\alpha = \sqrt{3}$ и $\beta = \sqrt{2}$.

²⁾ Въ теории несоизмѣримыхъ чиселъ (см. Приложение/ въ концѣ этой книги) доказывается, что искомае число, о которомъ говорится въ опредѣленіяхъ 1° и 2° (въ слѣдств., и въ остальныхъ), при всякихъ данныхъ числахъ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, существуетъ и только одно.

больше каждаго изъ произведеній:	и меньше каждаго изъ произведеній:
$1,7 \cdot 1,4 \dots = 2,38$	$1,8 \cdot 1,5 \dots = 2,70$
$1,73 \cdot 1,41 \dots = 2,4393$	$1,74 \cdot 1,42 \dots = 2,4708$
$1,732 \cdot 1,414 \dots = 2,449048$	$1,733 \cdot 1,415 \dots = 2,452195$
$1,7320 \cdot 1,4142 = 2,44939440$	$1,7321 \cdot 1,4143 = 2,44970903$

3°. Возвысить число α въ степень съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ и значить найти произведеіе $\alpha\alpha\alpha \dots \alpha$, составленное изъ n одинаковыхъ сомножителей, равныхъ α .

Это произведеіе, согласно опредѣленію умноженія, должно быть больше каждаго α^n и меньше каждаго A^n .

4°. Обратныя дѣйствія, т.-е. вычитаніе, дѣленіе и извлеченіе корня, опредѣляются для несоизмѣримыхъ чиселъ такъ же, какъ и для соизмѣримыхъ; такъ, вычестъ изъ числа α число β значить найти такое число x , чтобы сумма $\beta+x$ равнялась α , и т. д.

Если изъ чиселъ $\alpha, \beta, \gamma \dots$ нѣкоторыя будутъ соизмѣримыя, то въ данныхъ выше опредѣленіяхъ (прямыхъ дѣйствій) вмѣсто приближенныхъ значеній такихъ чиселъ можно брать точныя ихъ величины; если, напр., α несоизмѣримое число, а β соизмѣримое, напр. $\beta=5$, то, обозначивъ, какъ и прежде, черезъ a любое приближенное значеніе числа α съ недостаткомъ, и черезъ A любое приближенное значеніе числа α съ избыткомъ, можемъ сказать, что сумма $\alpha+5$ есть такое число, которое больше каждаго $a+5$ и меньше каждаго $A+5$.

Произведеіе несоизмѣримаго числа на нуль принимается равнымъ 0.

Когда среди чиселъ $\alpha, \beta, \gamma \dots$ встрѣчаются отрицательныя, то дѣйствія надъ ними производятся согласно правиламъ, даннымъ для отрицательныхъ соизмѣримыхъ чиселъ; напр., при умноженіи двухъ чиселъ одинаковые знаки даютъ плюсь, а равные—минусъ, а абсолютныя величины перемножаются.

При болѣе обстоятельномъ разсмотрѣніи дѣйствій надъ несоизмѣримыми числами, можно установить ¹⁾, что этимъ дѣй-

¹⁾ Это сдѣлано въ Приложеніи, помѣщенномъ въ концѣ этой книги.

ствіямъ принадлежатъ тѣ же свойства, которыя нами были указаны для дѣйствій надъ числами соизмѣримыми (§§ 19, 36); напр., сумма и произведеніе обладаютъ свойствами перемѣстительнымъ и сочетательнымъ; произведеніе, кромѣ того, еще обладаетъ распредѣлительнымъ свойствомъ, и т. п. Свойства, выражаемыя неравенствами, также применимы къ числамъ несоизмѣримымъ; такъ, если $\alpha > \beta$, то $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$, $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (если $\gamma > 0$) и $\alpha\gamma < \beta\gamma$ (если $\gamma < 0$), и т. п.

202. Замѣчаніе о приближенномъ вычисленіи. На практикѣ, при совершеніи какого-либо дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами, приходится большею частью довольствоваться приближеннымъ результатомъ этого дѣйствія. Въ этомъ случаѣ весьма важно знать, какъ велика погрѣшность, допускаемая при этомъ. Покажемъ на примѣрѣ, какъ можно опредѣлять такую погрѣшность. Пусть требуется вычислить произведеніе $\alpha\beta$ въ томъ случаѣ, если прибл. значенія чиселъ α и β будутъ тѣ, которыя указаны выше (на стран. 213). Тогда, ограничиваясь для α и β прибл. значеніями съ точностью до 0,0001, мы будемъ имѣть (по опредѣленію умноженія);

$$2,44939440 < \alpha\beta < 2,44970903.$$

Мы видимъ, что у крайнихъ чиселъ этого двойного неравенства одинаковы числа цѣлыхъ, десятыхъ, сотыхъ и тысячныхъ; такъ какъ произведеніе $\alpha\beta$ заключается между этими крайними числами, то, значить, $\alpha\beta = 2,449 + k$, гдѣ k есть нѣкоторое положительное число, меньше 0,001; потому, отбросивъ k и принявъ, что $\alpha\beta = 2,449$, мы будемъ имѣть прибл. значеніе этого произведенія съ недостаткомъ, при чемъ ошибка менѣе 0,001.

Подобнымъ образомъ можно поступать при вычисленіи суммы и степеней.

При вычисленіи разности и частнаго приходится нѣсколько измѣнить указанный приемъ. Положимъ, напр., надо вычислить разность $\alpha - \beta$ тѣхъ же чиселъ, о которыхъ мы сейчасъ говорили. Возьмемъ сначала для α значеніе съ недостаткомъ, напр., 1,732, а для β значеніе съ избыткомъ, напр., 1,415; тогда для разности $\alpha - \beta$ мы получимъ значеніе съ недостаткомъ, именно 0,317. Послѣ этого возьмемъ для α зна-

ченіе съ избыткомъ, напр. 1,733, а для β значеніе съ недостаткомъ, 1,414; тогда для $\alpha - \beta$ мы получимъ значеніе съ избыткомъ, „именно, 0,319. Слѣдовательно, $0,317 < \alpha - \beta < 0,319$. Поэтому, положивъ $\alpha - \beta = 0,31$, мы будемъ имѣть приближенное значеніе этой разности съ недостаткомъ, при чемъ ошибка менѣе 0,01 (положивъ $\alpha - \beta = 0,317$, получимъ приближенное значеніе съ недостаткомъ съ точностью до $\frac{2}{1000}$). Такъ же надо поступать при вычисленіи частнаго $\alpha : \beta$.

ГЛАВА VII.

Несоизмѣримыя значенія радикаловъ.

203. Приближенные m -ые корни. Приближеннымъ арифметическимъ корнемъ m -ой степени, съ точностью до $\frac{1}{n}$, изъ положительнаго числа A называется каждая изъ двухъ такихъ арифметическихъ дробей: $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, между m -ыми степенями которыхъ заключается число A ; такимъ образомъ, дроби эти должны удовлетворять двойному неравенству:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^m < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^m.$$

Здѣсь знакъ = (въ соединеніи со знакомъ $<$) мы поставили для того, чтобы не дѣлать исключенія для случая, когда число A есть точная m -ая степень, и цѣлое число n взято такимъ, что степень $\left(\frac{x}{n}\right)^m$ оказывается равной A ; тогда, конечно, число $\frac{x}{n}$ будетъ точнымъ корнемъ m -ой степени изъ A .

При $n=1$ указанное неравенство даетъ:

$$x^m < A < (x+1)^m.$$

Тогда цѣлыя числа x и $x+1$ будутъ приближенными корнями m -ой степени изъ A съ точностью до 1.

Можно также сказать, что приближенный корень m -ой степени изъ числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$, взятый съ недостаткомъ, есть наибольшее кратное дроби $\frac{1}{n}$, котораго m -ая степень не превосходитъ A .

Докажемъ, что, какъ бы мала ни была дробь $\frac{1}{n}$, всегда можно найти съ точностью до этой дроби приближенные корни любой степени изъ всякаго положительнаго числа A . Съ этою цѣлью вообразимъ, что числа натурального ряда возвышены въ m -ую степень и полученные результаты выписаны въ возрастающій рядъ:

$$0^m=0, 1^m=1, 2^m, 3^m, 4^m \dots a^m, (a+1)^m \dots$$

Будемъ въ этомъ ряду искать число, равное произведенію An^m , или близкое къ нему. Очевидно, что переходя въ ряду слѣва направо все далѣе и далѣе, мы всегда встрѣтимъ въ немъ два такихъ рядомъ стоящихъ числа, что, первое будетъ равно или меньше An^m , а второе больше этого произведенія. Пусть эти числа будутъ a^m и $(a+1)^m$, такъ что:

$$a^m < An^m < (a+1)^m.$$

Тогда, раздѣливъ всё числа на n^m , получимъ:

$$\frac{a^m}{n^m} < A < \frac{(a+1)^m}{n^m}, \text{ т.е. } \left(\frac{a}{n}\right)^m < A < \left(\frac{a+1}{n}\right)^m.$$

Такимъ образомъ, мы найдемъ двѣ дроби: $\frac{a}{n}$ и $\frac{a+1}{n}$, которыя, согласно опредѣленію, и будутъ приближенными корнями m -ой степени изъ числа A .

204. Точное значеніе $\sqrt[m]{A}$ въ томъ случаѣ, когда A не есть точная m -ая степень. Разъяснимъ, что въ этомъ случаѣ точная величина $\sqrt[m]{A}$ есть нѣкоторое несоизмѣримое число α , которое больше всякаго приближеннаго

корня m -ой степени пзъ A , если этотъ корень взять съ недостаткомъ, и меньше всякаго приближеннаго корня m -ой степени изъ A , если этотъ корень взять съ избыткомъ.

$$\sqrt{3}=1,7320\dots$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 27 \overline{)20'0} \\ \underline{7} \ 18 \ 9 \\ 343 \overline{)110'0} \\ \underline{3} \ 1 \ 02 \ 9 \\ 3462 \overline{)710'0} \\ \underline{2} \ 6 \ 92 \ 4 \\ 34640 \overline{)1760,0} \\ \underline{} \end{array}$$

Для ббльшей ясности мы будемъ говорить не о корнѣ m -ой степени вообще, а о корнѣ квадратномъ, и не изъ какого-нибудь положительнаго числа A , а изъ одного опредѣленнаго числа; напр., мы будемъ говорить о $\sqrt{3}$. Вообразимъ, что мы вычислили неограниченный рядъ приближенныхъ корней квадратныхъ изъ трехъ съ точностью: до 0,1, до 0,01, до 0,001, до 0,0001 и т. д. Эти значенія будутъ:

Съ недостаткомъ:	1,7	1,73	1,732	1,7320
Съ избыткомъ:	1,8	1,74	1,733	1,7321

Отнесемъ всё эти числа къ числовой прямой, на которой точка A принята за начало отръзковъ (черт. 25). Пусть точки: $b_1, b_2, b_3\dots$ (и вообще точки b) будутъ соответствовать числамъ верхней строки (т.-е. $Ab_1=1,7, Ab_2=1,73\dots$ и т. д.), а точки $B_1, B_2, B_3\dots$ (и вообще точки B) будутъ соответствовать числамъ нижней строки (т.-е. $AB_1=1,8, AB_2=1,74\dots$, и т. д.). Такъ



Черт. 25.

какъ каждый корень съ недостаткомъ всегда меньше каждаго корня съ избыткомъ (потому что квадратъ перваго меньше 3-хъ, а квадратъ втораго больше 3-хъ), то каждая точка b должна лежать н а л ѣ в о отъ каждой точки B . Съ другой стороны, разность между приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ и соответствующимъ приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ

(т.-е. число $\frac{1}{n}$) можетъ быть сдѣлана какъ угодно мала; поэтому

при неограниченномъ увеличеніи степени точности, съ какою мы находимъ приближенные квадратные корни изъ 3-хъ, промежутковъ на числовой прямой, отдѣляющій точки b отъ точекъ B , (т.-е. промежутковъ $b_1B_1, b_2B_2, b_3B_3\dots$), становится все меньше и меньше и можетъ сдѣлаться какъ угодно малымъ. При этихъ условіяхъ мы должны допустить, что на прямой существуетъ нѣкоторая точка X (и только одна), которая служитъ г р а н и ц е ю, отдѣляющею ту часть прямой, на которой лежатъ всѣ точки b , отъ той части ея, на которой расположены всѣ точки B .

Чтобы сдѣлать нагляднымъ существованіе такой точки X , вообразимъ, что всѣ точки b , а также и вся часть прямой, лежащая н а л ѣ в о отъ любой точки b , окрашена въ какой-нибудь одинаковый цвѣтъ, напр., въ зеленый, а всѣ точки B , а также и вся часть прямой, лежащая н а п р а в о отъ любой точки B , окрашены въ другой цвѣтъ, напр., въ красный.

Такъ какъ каждая точка b лежитъ н а л ѣ в о отъ каждой точки B , то ясно, что зеленая часть прямой не можетъ зайти на красную часть, и потому между этими частями должна быть какая-нибудь граница. Предположимъ, что зеленая часть будетъ отдѣляться отъ красной какимъ-нибудь неокрашеннымъ о т р ѣ з к о мъ прямой (напр., отрѣзкомъ b_2B_2 , черт. 25); тогда, очевидно, промежутковъ между точками b и точками B не можетъ сдѣлаться меньше этого отрѣзка; между тѣмъ, какъ мы видѣли, этотъ промежутокъ можетъ сдѣлаться какъ угодно малымъ. Слѣдовательно, нельзя допустить, чтобы между зеленою и красною частями прямой былъ какой-нибудь, хотя бы и очень малый, отрѣзокъ прямой; по тогда остается только одно предположеніе, что границею между этими частями служитъ т о ч к а, напр., точка X (черт. 25) ¹⁾.

Обозначимъ буквою α положительное число, соответствующее этой точкѣ (т.-е. число, служащее мѣрой отрѣзка AX). Покажемъ, что квадратъ этого числа долженъ быть

¹⁾ Это наглядное поясненіе заимствовано нами изъ книги «Leçons d'algèbre et d'analyse» par Jules T a n n e r y; tome premier, 1906.

въ точности равенъ 3. Пусть a и A будутъ какія-нибудь приближенныя значенія числа α , первое съ недостаткомъ, а второе съ избыткомъ. Тогда α^2 , согласно опредѣленію степени (§ 201, 3°), есть такое число, которое больше каждаго a^2 и меньше каждаго A^2 . По приближенными значеніями числа α называются приближенные результаты измѣренія отрѣзка AX , которому мѣрой служить число a ; эти же результаты суть тѣ числа, которыми выражаются отрѣзки $Ab_1, Ab_2, \dots, AB_1, AB_2, \dots$ (черт. 25), т.-е. тѣ числа, которыя составляютъ приближенные квадратные корни изъ 3-хъ. Число же, большее квадрата каждаго приближенного квадратнаго корня изъ 3-хъ, взятаго съ недостаткомъ, и меньшее квадрата каждаго приближенного квадратнаго корня изъ 3-хъ, взятаго изъ избыткомъ, есть 3 (согласно опредѣленію приближенныхъ квадратныхъ корней изъ 3-хъ). Значитъ, α^2 и есть 3. Отсюда, конечно, слѣдуетъ, что число α должно быть несоизмѣримое, такъ какъ не существуетъ соизмѣримаго числа, квадратъ котораго равнялся бы 3.

Мы говорили о $\sqrt{3}$ только для простоты. Все сказанное объ этомъ частномъ случаѣ корня можно повторить о корнѣ любой m -ой степени изъ любого положительнаго числа A .

Такимъ образомъ, будетъ ли A точная или неточная m -ая степень, всегда можно сказать, что $\sqrt[m]{A}$ есть нѣкоторое число (соизмѣримое или несоизмѣримое), m -ая степень котораго въ точности равна A . Поэтому всѣ свойства радикаловъ, основанныя на этомъ опредѣленіи корня (эти свойства выражены 3-ми теоремами § 166-го), применимы также и къ несоизмѣримымъ ихъ значеніямъ. Такимъ образомъ, каковы бы ни были положительныя числа a, b, c, \dots , всегда можемъ писать:

$$\sqrt[m]{abc\dots} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} \dots; \quad \sqrt[m]{a^{mn}} = a^n; \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

ГЛАВА VIII.

Дѣйствія надъ радикалами.

Предварительное замѣчаніе. Всѣ корни, о которыхъ говорится въ этой главѣ, предполагаются арифметическими (§ 162).

205. Теорема. Величина корня не измѣнится, если показателя его и показателя подкоренного числа:

1°, умножимъ на одно и то же цѣлое и положительное число или, 2°, раздѣлимъ на одно и то же цѣлое и положительное число, если такое дѣленіе совершается нацѣло.

Доказательство. 1°. Требуется доказать, что

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}},$$

гдѣ m , n и p какія-нибудь цѣлыя положительныя числа. Для доказательства возвысимъ обѣ части этого предполагаемаго равенства въ np -ю степень. Отъ возвышенія правой части равенства получимъ a^{mp} (такъ какъ извлеченіе корня np -й степени и возвышеніе въ np -ю степень суть дѣйствія, взаимно уничтожающіяся). Чтобы возвысить лѣвую часть равенства въ np -ю степень, мы можемъ (§155, теор. 2) возвысить ее сначала въ n -ую степень (получимъ a^m), а потомъ въ p -ую степень (получимъ a^{mp}). Мы видимъ, такимъ образомъ, что два числа:

$\sqrt[n]{a^m}$ и $\sqrt[np]{a^{mp}}$, отъ возвышенія въ одну и ту же np -ю степень, даютъ одно и то же число a^{mp} ; слѣдов., оба эти числа представляютъ собою арифметическій корень np -й степени изъ числа a^{mp} . Но арифметическій корень данной степени изъ данного числа

можетъ быть только одинъ (§ 163, III); поэтому $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

2°. Читая доказанное равенство справа лѣво, т.-е. такъ:

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m},$$

мы замѣчаемъ, что величина корня не измѣняется отъ дѣленія его показателя и показателя подкоренного числа на одно и то же цѣлое и положительное число, куда такое дѣленіе совершается нацѣло.

Замѣчаніе. Число p , на которое мы умножаемъ или дѣлимъ показатели корня и подкоренного числа, предполагалось нами цѣлымъ и положительнымъ, потому что если бы оно было дробное или отрицательное, то мы получили бы корень (и подкоренное число) съ показателемъ дробнымъ или отрицательнымъ, а корней съ такими показателями мы не рассматриваемъ. По той же причинѣ при дѣленіи показателей корня и подкоренного числа на p предполагается, что это дѣленіе выполняется нацѣло.

206. Слѣдствія. 1°. Показателей нѣсколькихъ корней можно сдѣлать одинаковыми (подобно тому, какъ знаменателей нѣсколькихъ дробей можно сдѣлать равными). Для этого достаточно найти общее кратное (лучше всего, наименьшее) показателей всѣхъ радикаловъ и помножить показателя каждого изъ нихъ и показателя подкоренного числа на соответствующаго дополнительнаго множителя.

Примѣръ. $\sqrt{ax}, \sqrt[3]{a^2}, \sqrt[12]{x}$.

Наименьшее кратное показателей этихъ радикаловъ есть 12; дополнительными множителями будутъ: для перваго радикала 6, для втораго 4 и для третьяго 1; на основаніи доказанной теоремы можемъ написать:

$$\sqrt{ax} = \sqrt[12]{(ax)^6} = \sqrt[12]{a^6x^6}; \quad \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[12]{a^8}; \quad \sqrt[12]{x} = \sqrt[12]{x}.$$

2°. Показатели корня и показателя подкоренного числа можно сократить на ихъ общаго множителя, если онъ есть.

Примѣры. 1) $\sqrt[8]{a^6} = \sqrt[4]{a^3}$; 2) $\sqrt[6]{(1+x)^3} = \sqrt{1+x}$.

3°. Если подкоренное выраженіе представляетъ собою произведеніе степеней, показатели которыхъ имѣютъ одного и того же общаго множителя съ показателемъ корня, то на этого множителя можно сократить всѣхъ показателей.

Примѣръ. $\sqrt[12]{64a^{12}b^6x^{18}} = \sqrt[12]{(2a^2bx^3)^6} = \sqrt{2a^2bx^3}$.

207. Подобные радикалы. Подобными радикалами наз. такіе, у которыхъ одинаковы подкоренныя выраженія и одинаковы показатели радикаловъ (различаться могутъ, слѣдовательно, только множители, стояще передъ знакомъ радикала). Таковы, напр., выраженія: $+3a\sqrt[3]{xy}$ и $-5b\sqrt[3]{xy}$.

Чтобы опредѣлить, подобны ли между собою данные радикалы, слѣдуетъ предварительно упростить ихъ, т.-е. если возможно:

- 1) вынести изъ-подъ знака радикала тѣхъ множителей, изъ которыхъ возможно извлечь корень (§ 168, 1°);
- 2) освободиться подъ радикалами отъ знаменателей дробей (§ 168, 3°);
- 3) понизить степень радикала, сокративъ показатели корня и подкоренного числа на общаго множителя (§ 206, 3°).

Примѣръ 1. Радикалы: $\sqrt[3]{8ax^3}$, $\sqrt[6]{64a^2y^{12}}$ окажутся подобными, если ихъ упростимъ такъ:

$$\sqrt[3]{8ax^3} = 2x\sqrt[3]{a}; \quad \sqrt[6]{64a^2y^{12}} = 2y^2\sqrt[6]{a^2} = 2y^2\sqrt[3]{a}.$$

Примѣръ 2. Три радикала $\sqrt{\frac{2x}{3}}$, $\sqrt{\frac{6}{x}}$ и $\sqrt{6x}$ окажутся подобными, если освободимся подъ радикалами отъ знаменателей:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2x}{3}} &= \sqrt{\frac{2x \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{6x}{9}} = \frac{\sqrt{6x}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{6x}. \\ \sqrt{\frac{6}{x}} &= \sqrt{\frac{6 \cdot x}{x \cdot x}} = \sqrt{\frac{6x}{x^2}} = \frac{\sqrt{6x}}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{6x}. \end{aligned}$$

208. Дѣйствія надъ ирраціональными одночленами.

1°. **Сложеніе и вычитаніе.** Чтобы сложить или вычесть ирраціональные одночлены (т.-е. одночлены, въ которые входитъ дѣйствіе извлеченія корня), соединяють ихъ знаками + или — и, если возможно, дѣлають приведеніе подобныхъ радикаловъ.

Примѣры.

- 1) $a\sqrt[3]{a^3bc} + b\sqrt[3]{ab^3c} + c\sqrt[3]{abc^3} = a^2\sqrt[3]{abc} + b^2\sqrt[3]{abc} + c^2\sqrt[3]{abc} =$
 $= (a^2 + b^2 + c^2)\sqrt[3]{abc};$
- 2) $15\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{32} - 16\sqrt[3]{\frac{1}{16}} - \sqrt[3]{108} = 15\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{4} -$
 $- 3\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4};$
- 3) $\frac{2}{3}x\sqrt{9x} + 6x\sqrt{\frac{x}{4}} - x^2\sqrt{\frac{1}{2}} = 2x\sqrt{x} + 3x\sqrt{x} - x\sqrt{x} = 4x\sqrt{x}.$

2°. **Умноженіе.** Такъ какъ $\sqrt[n]{abc\dots} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c\dots}$ (§ 166, теор. 1), то и наоборотъ: $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c\dots} = \sqrt[n]{abc\dots}$; значить, чтобы перемножить нѣсколько радикаловъ съ одинаковыми показателями, достаточно перемножить подкоренныя числа.

Если для перемноженія даны радикалы съ различными показателями, то ихъ предварительно приводятъ къ одинаковому показателю.

Если передъ радикалами есть коэффициенты, то ихъ перемножаютъ.

Примѣры.

- 1) $ab\sqrt{2a} \cdot \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{2}} \cdot 2b\sqrt{ab} - 2a^2b\sqrt{a^2b^2} = 2a^3b^2;$
- 2) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{2}} = \sqrt[12]{3^3} \sqrt[12]{\left(\frac{1}{3}\right)^4} \cdot \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt[12]{3^3 \cdot \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{2^2}} = \sqrt[12]{\frac{1}{12}}.$

3°. **Дѣленіе.** Такъ какъ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (§ 166, теор. 3), то и

наоборотъ: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; значить, чтобы раздѣлять радикалы съ одинаковыми показателями, достаточно раздѣлить ихъ подкоренныя числа.

Радикалы съ различными показателями предварительно приводя къ одинаковому показателю.

Если есть коэффициенты, то ихъ дѣлать.

Примѣры.

$$1) -6\sqrt{\frac{2a-2b}{a^2}} : \frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^3}} = \frac{6.5}{4}\sqrt{\frac{2(a-b)2bx^2}{x^2(a-b)}} = 15\sqrt{b}.$$

$$2) \sqrt[6]{\frac{2a+b}{a+b}} - 1 : \sqrt[6]{1 - \frac{b}{a+b}} = \sqrt[6]{\frac{a}{a+b}} : \sqrt[6]{\frac{a}{a+b}} = 1.$$

$$3) \frac{3a^2}{25b}\sqrt[4]{\frac{a^3}{a-x}} : \frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{2a^3}{a-x}} = \frac{15a^2b}{50ab}\sqrt[4]{\frac{a^2(a-x)^2}{(a-x)4a^6}} = \frac{3}{10}\sqrt[4]{\frac{a-x}{4}}.$$

4°. **Возвышеніе въ степень.** Чтобы возвысить радикаль въ степень, достаточно возвысить въ эту степень подкоренное число. Дѣйствительно, если показатель степени есть цѣлое положительное число m , то:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \dots = \sqrt[n]{aaa\dots} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Эта теорема остается вѣрной и для отрицательнаго показателя $-m$; дѣйствительно, тогда:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}},$$

$$\text{и } \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \quad \text{значить: } \left(\sqrt[n]{a}\right)^{-m} = \sqrt[n]{a^{-m}}.$$

Наконецъ, если показатель степени есть 0, то

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^0 = 1 \text{ и } \sqrt[n]{a^0} = \sqrt[n]{1} = 1: \text{ слѣд., } \left(\sqrt[n]{a}\right)^0 = \sqrt[n]{a^0}.$$

Примѣры.

$$1) \left(\sqrt[4]{2ab^3x^2}\right)^5 = \sqrt[4]{(2ab^3x^2)^5} = \sqrt[4]{8a^5b^{15}x^{10}} = b^3x^2\sqrt[4]{8a^5b^3x^2};$$

$$2) \left(\sqrt[6]{\frac{2x}{1+x}}\right)^3 = \sqrt[6]{\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3} = \sqrt{\frac{2x}{1+x}}.$$

$$3) \left(a \sqrt[3]{a^3 b} \right)^3 = a^3 \left(\sqrt[3]{a^3 b} \right)^3 = a^3 \sqrt[3]{\left(a^3 b \right)^3} = a^3 \sqrt[3]{a^9 b^3} = a^3 \sqrt[3]{a^3 \left(\sqrt[3]{b} \right)^3} = a^3 \sqrt[3]{a^3 b} = a^4 \sqrt[3]{ab}.$$

5°. Извлечение корня. Чтобы извлечь корень изъ радикала, достаточно перемножить ихъ показателей.

Требуется доказать, что $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$ и вообще:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Для доказательства возвысимъ обѣ части этого предполагаемаго равенства въ mn -ую степень. Отъ возвышенія правой части получимъ, по опредѣленію корня, a ; чтобы возвысить лѣвую часть въ mn -ую степень, можно возвысить сначала въ n -ую степень, потомъ результатъ въ m -ую степень:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \right)^n \right]^m = \left(\sqrt[m]{a} \right)^m = a.$$

Отсюда видно, что предполагаемое равенство вѣрно.

Слѣдствія. 1°. Результатъ нѣсколькихъ послѣдовательныхъ извлеченій корней не зависитъ отъ порядка дѣйствій; такъ:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \text{ и } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \text{ слѣд., } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

2°. Извлечение корня, у котораго показатель число составное, сводится къ послѣдовательному извлеченію корней, у которыхъ показатели простые множители этого составнаго числа. Такъ:

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}; \quad \sqrt[18]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}}; \quad \sqrt[4]{a} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{a}}.$$

Примѣръ. Преобразовать выраженіе $\sqrt[4]{x \sqrt[3]{2x^2 \sqrt{\frac{1}{4}x^3}}}$.

Подведемъ множителя $2x^2$ подъ знакъ квадратнаго радикала, для чего предварительно возвысимъ его въ квадратъ; тогда получимъ:

$$\sqrt[4]{x \sqrt[3]{\sqrt{(2x^2)^2 \cdot 4x^3}}} = \sqrt[4]{x \sqrt[3]{\sqrt{4x^4 \cdot 4x^3}}} = \sqrt[4]{x \sqrt[3]{\sqrt{3x^7}}} = \sqrt[4]{x \sqrt[6]{3x^7}}$$

Теперь подведем множителя x под знак радикала 6-й степени; тогда получимъ:

$$\sqrt[4]{\sqrt[6]{x^6 \cdot 3x^7}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{3x^{13}}} = \sqrt[24]{3x^{13}}.$$

209. Дѣйствія надъ ирраціональными многочленами производятся по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены раньше для многочленовъ рациональныхъ. Напр.:

$$1) \left(\frac{2}{5}\sqrt{5} - 5\sqrt{0,3}\right)^2 = \frac{4}{5} - 4\sqrt{1,5} + 7,5 = 8,3 - 4\sqrt{1,5};$$

$$2) \left(n\sqrt[3]{nx^2} - 2n^2x\sqrt[3]{n^2x} + x\sqrt[3]{\frac{n}{x}}\right) : n^2\sqrt[5]{nx^2} = \\ = \frac{1}{n} - 2x\sqrt[3]{\frac{n}{x}} + \frac{x}{n^2}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{n} - 2\sqrt[3]{nx^2} + \frac{1}{n^2}.$$

210. Освобожденіе знаменателя дроби отъ радикаловъ. При вычисленіи дробныхъ выраженій, знаменатели которыхъ содержатъ радикалы, бываетъ полезно предварительно преобразовать дробь такъ, чтобы знаменатель ея не содержалъ радикаловъ. Чтобы указать пользу такого преобразованія, положимъ для примѣра, что намъ нужно вычислить:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \quad (1)$$

Мы можемъ производить вычисленія или прямо по этой формулѣ, или же предварительно сдѣлать ея знаменателя рациональнымъ, для чего достаточно умножить оба члена дроби (1) на сумму $\sqrt{3} + \sqrt{2}$:

$$x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}. \quad (2)$$

Формула (2), очевидно, удобнѣе для вычисленія, чѣмъ формула (1) ¹⁾.

Приведемъ простѣйшіе примѣры освобожденія знаменателя дроби отъ радикаловъ ²⁾:

1) $\frac{m}{n\sqrt{a}}$. Умноживъ числителя и знаменателя на \sqrt{a} , получимъ:

$$\frac{m}{n\sqrt{a}} = \frac{m\sqrt{a}}{na}.$$

Когда a есть число цѣлое составное, то полезно разложить его на простыхъ множителей съ цѣлью опредѣлить, какихъ множителей недостаетъ въ немъ для того, чтобы a было точнымъ квадратомъ. Тогда достаточно умножить оба члена дроби на квадратный корень изъ произведенія только недостающихъ множителей; такъ, напр.:

$$\frac{m}{\sqrt{40}} = \frac{m}{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}} = \frac{m\sqrt{2 \cdot 5}}{\sqrt{2^3 \cdot 5}} = \frac{m\sqrt{10}}{\sqrt{2^4 \cdot 5^2}} = \frac{m\sqrt{10}}{2^2 \cdot 5} = \frac{m\sqrt{10}}{20}.$$

2) $\frac{m}{a+\sqrt{b}}$. Умножимъ числителя и знаменателя на $a-\sqrt{b}$:

$$\frac{m}{a+\sqrt{b}} = \frac{m(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} = \frac{ma-m\sqrt{b}}{a^2-b}.$$

3) Подобно этому для освобожденія отъ радикала знаменателя дроби $\frac{m}{a-\sqrt{b}}$ достаточно умножить оба ея члена на $a+\sqrt{b}$.

¹⁾ Удобнѣе не только потому, что она содержитъ 3 дѣйствія, а не 4, какъ формула (1), но также и потому, что при вычисленіи, которое по необходимости можетъ быть только приближенное, степень погрѣшности результата сравнительно просто опредѣляется по формулѣ (2). Такъ, вычисливъ $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ съ точностью до $\frac{1}{1000}$, т. е. положивъ $\sqrt{3} = 1,732 \dots$ и $\sqrt{2} = 1,414 \dots$, мы получимъ по формулѣ (2) число 3,146 \dots , которое, какъ легко сообразить, точно до $\frac{1}{1000}$ (слѣд., въ этомъ числѣ нельзя ручаться за правильность цифры тысячныхъ).

²⁾ Общій способъ освобожденія знаменателя дроби отъ радикаловъ указанъ ниже, въ § 236.

4) $\frac{m}{\sqrt{a \pm \sqrt{b}}}$. Умножимъ числителя и знаменателя на $\sqrt{a \mp \sqrt{b}}$:

$$\frac{m}{\sqrt{a+\sqrt{b}}} = \frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{m\sqrt{a}-m\sqrt{b}}{a-b}$$

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{m\sqrt{a}+m\sqrt{b}}{a-b}$$

5) $\frac{m}{\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}}}$ Желая сначала освободить знаменателя отъ

радикала \sqrt{c} , примемъ совокупность остальныхъ членовъ за одночленъ; тогда знаменатель приметъ видъ $(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{c})$. Умножимъ теперь числителя и знаменателя дроби на $(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{c})$. Тогда въ знаменателѣ получимъ: $(\sqrt{a+\sqrt{b}})^2 - c = (a+b-c) + 2\sqrt{ab}$. Умноживъ опять числителя и знаменателя на $(a+b-c) - 2\sqrt{ab}$, получимъ въ знаменателѣ рациональное выраженіе $(a+b-c)^2 - 4ab$.

6) Подобнымъ приемомъ можно уничтожить въ знаменателѣ сколько угодно квадратныхъ радикаловъ. Пусть, напримеръ, знаменатель есть: $\sqrt{a} + \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$. Представивъ его въ видѣ: $\sqrt{a} + \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt{c} + \sqrt{b}\sqrt{c}$, замѣчаемъ, что имѣемъ дѣло съ тремя различными радикалами: \sqrt{a} , \sqrt{b} и \sqrt{c} . Желая освободиться отъ радикала \sqrt{a} , вынесемъ его за скобки изъ всѣхъ членовъ, гдѣ онъ встрѣчается: $\sqrt{a}(1 + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \sqrt{bc}$. Теперь очевидно, что для уничтоженія \sqrt{a} достаточно умножить знаменателя (а слѣд., и числителя) на $\sqrt{a}(1 + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - \sqrt{bc}$; тогда въ знаменателѣ получимъ:

$$a(1 + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - bc = a + ab + ac + 2a\sqrt{b} + 2a\sqrt{c} + 2a\sqrt{bc} - bc.$$

Желая теперь освободиться отъ \sqrt{b} , представимъ знаменателя въ видѣ двучлена:

$$\sqrt{b}(2a + 2a\sqrt{c}) + (a + ab + ac - bc + 2a\sqrt{c})$$

и умножимъ числителя и знаменателя дроби на разность этихъ членовъ; тогда въ знаменателѣ получимъ:

$$b(2a + 2a\sqrt{c})^2 - (a + ab + ac - bc + 2a\sqrt{c})^2.$$

Раскрывъ скобки и поступая съ $\sqrt[3]{c}$ совершенно такъ же, освободимся и отъ него.

7) Если знаменатель имѣеть видъ: $\sqrt[3]{a \mp b}$, или $a \mp \sqrt[3]{b}$, или $\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}$, то мы можемъ сдѣлать его рациональнымъ, основываясь на тождествахъ (§ 80, VI):

$$\begin{aligned} (x-y)(x^2+xy+y^2) &= x^3-y^3 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2) &= x^3+y^3. \end{aligned}$$

Пусть, напр., дана дробь $\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$. Обозначивъ для краткости $\sqrt[3]{a}$ черезъ x и $\sqrt[3]{b}$ черезъ y , умножимъ числителя и знаменателя на x^2+xy+y^2 :

$$\frac{m}{x-y} = \frac{m(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{mx^2+mxу+my^3}{x^3-y^3}.$$

Но $x^3=a$ и $y^3=b$; слѣд.:

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{m(\sqrt[3]{a})^2+m\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+m(\sqrt[3]{b})^2}{a-b} = \frac{m\sqrt[3]{a^2}+m\sqrt[3]{ab}+m\sqrt[3]{b^2}}{a-b}.$$

8. Вообще, когда знаменатель дроби есть биномъ, представляющій сумму или разность двухъ радикаловъ какой угодно степени, то его можно сдѣлать рациональнымъ, основываясь на тождествѣ (§ 79):

$$(x-y)(x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+\dots+y^{n-1})=x^n-y^n.$$

Пусть, напр., знаменатель имѣеть видъ:

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=x-y, \text{ гдѣ } x=\sqrt[n]{a}, y=\sqrt[n]{b}.$$

Умноживъ числителя и знаменателя на

$$x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+\dots+y^{n-1},$$

получимъ въ знаменателѣ $x^n-y^n=a-b$

Если знаменатель есть $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$, то представимъ его въ видѣ:

$$\sqrt[n]{a}-(-\sqrt[n]{b})=x-y, \text{ гдѣ } x=\sqrt[n]{a}, y=-\sqrt[n]{b}.$$

сведемъ этотъ случай на предыдущій.

Подобнымъ же образомъ поступаемъ, когда знаменатель имѣеть видъ $m \mp \sqrt[n]{b}$

Если знаменатель есть бином $\sqrt[n]{a} \mp \sqrt[m]{b}$, то можно предварительно привести эти радикалы къ одинаковымъ показателямъ:

$$\sqrt[n]{a} \mp \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} \mp \sqrt[nm]{b^n}$$

и потомъ поступать по предыдущему.

Примѣръ.
$$\frac{M}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[m]{b}} = \frac{M}{\sqrt[n]{a^m} - \sqrt[m]{b^n}} =$$

$$= \frac{M[(\sqrt[n]{a^2})^5 + \sqrt[n]{b^3}(\sqrt[n]{a^2})^4 + ba + (\sqrt[n]{b^3})^3(\sqrt[n]{a^2})^2 + (\sqrt[n]{b^3})^5 \sqrt[n]{a^2} + (\sqrt[n]{b^3})^5]}{a^2 - b^3}$$

$$= M(a\sqrt[n]{a^2} + a\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{a} + ba + b\sqrt[n]{a^2}\sqrt[n]{b} + b^2\sqrt[n]{a} + b^2\sqrt[n]{b}) : (a^2 - b^3).$$

Примѣры.

$$1) \frac{\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{6}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{6})(2\sqrt{2} - \sqrt{6})}{3 - 6} =$$

$$= \frac{4 - \frac{2}{3}\sqrt{12} - \sqrt{12} + 2}{2} = 3 - \frac{5}{6}\sqrt{21} = 3 - \frac{5}{3}\sqrt{3}.$$

$$2) \frac{4\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{2}(2 + \sqrt{2} - \sqrt{6})}{(2 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{8\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{12}}{4 + 4\sqrt{2} + 2 - 6} =$$

$$= \frac{8\sqrt{2} + 8 - 8\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{16 + 8\sqrt{2} - 8\sqrt{6}}{8} = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{6};$$

$$3) \frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}} = \frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{1-\sqrt{a}}\sqrt{1+\sqrt{a}}} = \frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{1-a}}$$

$$= \sqrt{1-a}\sqrt{1+\sqrt{a}} = \sqrt{(1-a)(1+\sqrt{a})};$$

$$4) \frac{5}{\sqrt[4]{3} - 2\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt[4]{3} + 2\sqrt{3})}{\sqrt[4]{3} - 12} = \frac{5(\sqrt[4]{3} + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} + 12)}{-141}.$$

ОТДѢЛЪ V.

Уравненія степени выше первой.

ГЛАВА I.

Квадратное уравненіе.

211. Нормальный видъ квадратнаго уравненія.

Чтобы судить о степени уравненія, въ немъ надо предварительно сдѣлать слѣдующія преобразованія (§ 115): раскрыть скобки, освободиться отъ знаменателей, перенести всѣ члены, содержащіе неизвѣстное, въ одну часть уравненія и, наконецъ, сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ. Къ этимъ преобразованіямъ мы теперь добавимъ еще одно: если въ уравненіе входят радикалы, подкоренныя выраженія которыхъ содержатъ неизвѣстное, то отъ такихъ радикаловъ уравненіе надо освободить (какъ это сдѣлать, будетъ указано впоследствии). Предположимъ, что всѣ эти преобразованія сдѣланы. Если послѣ этого въ уравненіи съ однимъ неизвѣстнымъ x окажется членъ, содержащій x^2 , но не будетъ членовъ, содержащихъ x въ болѣе высокой степени, то такое уравненіе наз. уравненіемъ второй степени или квадратнымъ.

Въ уравненіи второй степени (а также и въ уравненіяхъ болѣе высокихъ степеней) обыкновенно переносятъ всѣ члены уравненія въ одну лѣвую часть, такъ что правая часть уравненія дѣлается равной нулю; тогда квадратное уравненіе получаетъ слѣдующій видъ, называемый нормальнымъ:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

въ которомъ буквы a , b и c означаютъ какія-нибудь данныя алгебраическія числа или же алгебраическія выраженія, составленныя изъ данныхъ чиселъ. Числа a , b и c называются коэффиціентами квадратнаго уравненія; изъ нихъ c наз. также свободнымъ членомъ. Когда ни одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ не равенъ нулю, квадратное уравненіе наз. полнымъ.

Замѣтимъ, что коэффиціентъ a мы всегда можемъ сдѣлать положительнымъ, перемѣнивъ въ случаѣ надобности передъ всѣми членами уравненія знаки на противоположныя.

Примѣръ 1.
$$\frac{6}{x} + \frac{x}{6} = \frac{5(x+1)}{4}.$$

Раскрываемъ скобки:
$$\frac{6}{x} + \frac{x}{6} = \frac{5x+5}{4}.$$

Уничтожаемъ знаменателей: $72 + 2x^2 = 15x^2 + 15x.$

Переносимъ всё члены въ лѣвую часть: $72 + 2x^2 - 15x^2 - 15x = 0.$

Дѣлаемъ приведеніе: $-13x^2 - 15x + 72 = 0.$

Перемѣняемъ знаки: $13x^2 + 15x - 72 = 0.$

Коэффиціенты a , b и c общаго вида квадратнаго уравненія приняли въ этомъ примѣрѣ такія частныя значенія: $a=13$, $b=15$ и $c=-72$.

Примѣръ 2.
$$\frac{x}{a-b} = \frac{1}{2\sqrt{a-x}} = 0.$$

$$x(2\sqrt{a-x}) - (a-b) = 0; \quad 2x\sqrt{a-x} - (a-b) = 0.$$

$$x^2 - 2x\sqrt{a-x} + (a-b) = 0.$$

Коэффиціенты общаго вида квадратнаго уравненія здѣсь приняли такія частныя значенія: $a=1$, $b=-2\sqrt{a}$, $c=a-b$.

Замѣчаніе. Такъ какъ въ этихъ примѣрахъ намъ пришлось отбросить общаго знаменателя, содержащаго неизвѣстное, то надо рѣшить вопросъ, не всли ли мы этимъ посторонняго рѣшенія, обращающаго въ нуль отброшеннаго знаменателя. Въ примѣрѣ 1-мъ общій знаменатель $12x$ обращается въ 0 при $x=0$; въ примѣрѣ 2-мъ общій знаменатель $(a-b)(2\sqrt{a-x})$,

если $a \neq b$, обращается въ 0 при $x=2\sqrt{a}$. Подставивъ эти значенія x въ получившіяся квадратныя уравненія, находимъ, что они нѣтъ удовлетворяютъ; слѣд., отбрасываніе общаго знаменателя не ввело постороннихъ рѣшеній.

212. Болѣе простой видъ квадратнаго уравненія. Уравненію $ax^2+bx+c=0$ часто придаютъ болѣе простой видъ, раздѣливъ всѣ его члены на коэффициентъ при x^2 .

Обозначивъ для краткости $\frac{b}{a}$ черезъ p , а $\frac{c}{a}$ черезъ q , получимъ:

$$x^2+px+q=0.$$

Такъ, уравненіе $3x^2-15x+2=0$, по раздѣленіи всѣхъ его членовъ на 3, приметъ видъ: $x^2-5x+\frac{2}{3}=0$. Здѣсь $p=-5$, $q=\frac{2}{3}$.

213. Неполныя квадратныя уравненія. Рѣшеніе ихъ. Квадратное уравненіе наз. неполнымъ, когда въ немъ нѣтъ члена, содержащаго x въ первой степени, или нѣтъ свободнаго члена, или нѣтъ ни того, ни другого. Значитъ, неполныя квадратныя уравненія могутъ быть только трехъ слѣдующихъ видовъ:

- | | |
|----------------|-------------------|
| 1) $ax^2+c=0$ | (когда $b=0$); |
| 2) $ax^2+bx=0$ | (когда $c=0$); |
| 3) $ax^2=0$ | (когда $b=c=0$). |

Разсмотримъ рѣшеніе каждаго изъ нихъ.

I. Изъ уравненія $ax^2+c=0$ находимъ слѣдующія равносплнныя уравненія:

$$ax^2=-c \text{ и } x^2=-\frac{c}{a}.$$

Послѣднее уравненіе требуетъ, чтобы квадратъ неизвѣстнаго равнялся числу $-\frac{c}{a}$; значить, неизвѣстное должно равняться

квадратному корню изъ этого числа. Это возможно только тогда, когда численная величина выраженія $-\frac{c}{a}$ положительна, что

будетъ тогда, когда численная величина дроби $\frac{c}{a}$ отрицательна,

т.-е. когда буквы c и a означают числа съ противоположными знаками (если, например, $c = -8$, $a = +2$, то $\frac{c}{a} = \frac{-8}{+2} = +4$).

Условимся обозначать знакомъ $\sqrt{\quad}$ только арифметическое значение квадратнаго корня и примемъ во вниманіе, что квадратный корень изъ положительнаго числа имѣеть два значенія (§ 165, III); тогда уравненіе $x^2 = \frac{c}{a}$ равносильно такому:

$$x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$$

Обозначая одно значеніе корня черезъ x_1 , а другое черезъ x_2 , мы можемъ послѣднее уравненіе подробнѣе выразить такъ:

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}}; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ получаются 2 различныхъ рѣшенія квадратнаго уравненія.

Если же буквы c и a означаютъ числа съ одинаковыми знаками, то выраженіе $-\frac{c}{a}$ представляетъ собою отрицательное число; тогда уравненіе $ax^2 + c = 0$ не можетъ быть удовлетворено никакимъ вещественнымъ числомъ; въ этомъ случаѣ говорить, что уравненіе имѣеть два мнимыхъ корня.

Примѣръ 1. Рѣшить уравненіе $3x^2 - 27 = 0$.

$$3x^2 = 27; \quad x^2 = 9; \quad x = \pm \sqrt{9} = \pm 3.$$

(подробнѣе: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$).

Примѣръ 2. Рѣшить уравненіе $x^2 + 25 = 0$.

$$x^2 = -25; \quad x = \pm \sqrt{-25}; \quad \text{корни мнимые.}$$

II. Чтобы рѣшить уравненіе $ax^2 + bx = 0$, представимъ его такъ: $x(ax + b) = 0$. Въ этомъ видѣ лѣвая часть уравненія представляетъ собою произведеніе двухъ сомножителей: x и $ax + b$. Но чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо и достаточно,

чтобы какой-нибудь из сомножителей равнялся нулю; слѣд., рассматриваемое уравненіе удовлетворится, когда положимъ, что $x=0$, или $ax+b=0$. Второе уравненіе даетъ: $x=-\frac{b}{a}$. Значитъ, уравненіе $ax^2+bx=0$ имѣетъ два вещественные корня: $x_1=0$ и $x_2=-\frac{b}{a}$.

Примѣръ. $2x^2-7x=0$, $x(2x-7)=0$; $x_1=0$; $x_2=-\frac{7}{2}$.

III. Наконецъ, квадратное уравненіе $ax^2=0$ имѣетъ (если $a \neq 0$) только одно рѣшеніе: $x=0$.

214. Рѣшеніе уравненія вида $x^2+px+q=0$. Перенеся свободный членъ въ правую часть, получимъ: $x^2+px=-q$. Двучленъ x^2+px можно рассматривать, какъ выраженіе $x^2+2 \cdot \frac{p}{2}x$, т.-е. какъ сумму квадрата x съ удвоеннымъ произведеніемъ x на $\frac{p}{2}$. Отсюда заключаемъ, что если къ этому двучлену придадимъ

число $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, то получимъ трехчленъ, представляющій собою квадратъ суммы $x+\frac{p}{2}$. Замѣтивъ это, приложимъ къ обѣимъ частямъ уравненія по $\left(\frac{p}{2}\right)^2$; тогда получимъ такое равносильное уравненіе:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ или } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Послѣднее уравненіе требуетъ, чтобы квадратъ числа $x+\frac{p}{2}$ равнялся $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$; это значитъ, что первое число есть корень квадратный изъ второго. Обозначая попережнему знакомъ $\sqrt{\quad}$ только арифметическое значеніе квадратнаго корня и принявъ во вниманіе, что квадратный корень имѣетъ два значенія, отличающіяся знаками, мы можемъ написать:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

и, слѣдов.:
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

или подробнѣе:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Никакого третьяго значенія x имѣть не можетъ, такъ какъ сумма $x + \frac{p}{2}$, будучи такимъ числомъ, квадратъ котораго долженъ равняться числу $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, можетъ имѣть только 2 указанныхъ значенія.

Полученныя 2 формулы для неизвѣстнаго x мы можемъ высказать такъ:

неизвѣстное квадратнаго уравненія, у котораго коэффициентъ при x^2 есть 1, равно половинѣ коэффициента при неизвѣстномъ въ 1-й степени съ противоположнымъ знакомъ, плюсъ, минусъ корень квадратный изъ квадрата этой половины безъ свободнаго члена.

Замѣчаніе. Если p есть число отрицательное, то выраженіе $-\frac{p}{2}$ должно быть числомъ положительнымъ; точно такъ же если q число отрицательное, то $-q$ число положительное.

Примѣры. 1) $x^2 - 7x + 10 = 0$; здѣсь $p = -7$, $q = +10$;

поэтому:
$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{7}{2}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

Слѣдовательно: $x_1 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5$, $x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$.

Повѣрка: $5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$; $2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0$.

2) $x^2 - x - 6 = 0$; здѣсь $p = -1$, $q = -6$, поэтому:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2.$$

Про́вѣрка: $3^2-3-6=0$; $(-2)^2-(-2)-6=0$.

3) $x^2-2x+5=0$; $x=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm\sqrt{-4}$. Корни мнимые.

4) $x^2-18x+81=0$; $x=9\pm\sqrt{81-81}=9$. Уравненіе имѣетъ только одинъ корень.

215. Рѣшеніе уравненія вида $ax^2+bx+c=0$.
Раздѣливъ всѣ члены этого уравненія на a , получимъ:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Примѣнимъ къ этому виду уравненія формулу, выведенную раньше для уравненія $x^2+px+q=0$, и упростимъ ее:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \\ &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Полученную формулу можно выразить словами такъ:

неизвѣстное квадратнаго уравненія равно дробя, у которой числитель есть коэффициентъ при неизвѣстномъ въ первой степени съ противоположнымъ знакомъ, плюсъ, минусъ корень квадратный изъ квадрата того же коэффициента безъ учетвереннаго произведенія коэффициента при неизвѣстномъ во второй степени на свободный членъ, а знаменатель есть удвоенный коэффициентъ при неизвѣстномъ во второй степени.

Замѣчаніе. Выведенная формула представляетъ собою общее рѣшеніе квадратнаго уравненія, потому что изъ нея можно получить какъ рѣшеніе упрощеннаго полнаго уравненія $x^2+px+q=0$ (полагая $a=1$), такъ и рѣшеніе неполныхъ квадратныхъ уравненій (полагая $b=0$ или $c=0$).

Примѣры.

1) $3x^2-7x+4=0$; здѣсь $a=3$, $b=-7$, $c=4$.

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6}$$

$$x_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \quad x_2 = 1.$$

2) $2x^2 - 3x + 10 = 0$; здесь $a=2$, $b=-3$, $c=10$.

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{71}}{4}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{71}}{4}.$$

Оба корня оказываются мнимыми.

216. Упрощение общей формулы, когда коэффициент b есть четное число. Пусть $b=2k$, то-есть уравнение имѣетъ видъ:

$$ax^2 + 2kx + c = 0.$$

Примѣняя общую формулу, получимъ:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a};$$

$$x = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Эту сокращенную формулу полезно также запомнить.

Примѣры.

1) $5x^2 - 8x - 2 = 0$; здесь $a=5$, $b=-8=-2 \cdot 4$, $c=-2$.

Примѣняя сокращенную формулу, получаемъ:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 10}}{5} = \frac{4 \pm \sqrt{26}}{5}.$$

$$\sqrt{26} = 5,09 \text{ (до } \frac{1}{100}\text{)}; \quad x_1 = \frac{9,09}{5} = 1,818; \quad x_2 = \frac{-1,09}{5} = -0,218.$$

2) $(a^2 - b^2)x^2 - 2(2a^2 - b^2)x + 4a^2 - b^2 = 0$.

По сокращенной формулѣ находимъ:

$$x = \frac{2a^2 - b^2 \pm \sqrt{(2a^2 - b^2)^2 - (a^2 - b^2)(4a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

Подк. величина $= 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4 - 4a^4 + 4a^2b^2 + a^2b^2 - b^4 = a^2b^2$

$$x_1 = \frac{2a^2 - b^2 + ab}{a^2 - b^2}, \quad x_2 = \frac{2a^2 - b^2 - ab}{a^2 - b^2},$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a^2 - b^2 + a^2 + ab}{a^2 - b^2} = \frac{(a+b)(a-b) + a(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{2a-b}{a-b}, \\ x_2 &= \frac{a^2 - b^2 + a^2 - ab}{a^2 - b^2} = \frac{(a+b)(a-b) + a(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{2a+b}{a+b}. \end{aligned}$$

217. Число корней квадратнаго уравненія.

Разсматривая рѣшеніе квадратныхъ уравненій, мы видимъ, что эти уравненія иногда имѣютъ два корня, иногда одинъ, иногда ни одного (случай мнимыхъ корней). Однако согласи- лись приписывать квадратнымъ уравне- ніямъ во всѣхъ случаяхъ два корня, разумѣя при этомъ, что корни могутъ быть иногда равными, иногда мни- мыми. Причина такого соглашенія состоитъ въ томъ, что формулы, выражающія мнимые корни уравненія, обладаютъ тѣми же свой- ствами, какія принадлежатъ вещественнымъ корнямъ, стоитъ только, совершая дѣйствія надъ мнимыми числами, руково- диться правилами, выведенными для вещественныхъ чиселъ, принимая притомъ, что $(-a)^2 = -a$. Точно также, когда урав- неніе имѣетъ одинъ корень, мы можемъ, разсматривая этотъ корень, какъ два одинаковыхъ, приписать имъ тѣ же свойства, какія принадлежатъ разнымъ корнямъ урав- ненія. Простѣйшія изъ этихъ свойствъ выражаются въ слѣдую- щей теоремѣ.

218. Теорема, выражающая два свойства кор- ней квадратнаго уравненія. Если α и β суть корни уравненія $x^2 + px + q = 0$, то

$$\alpha + \beta = -p \text{ и } \alpha\beta = q.$$

т.-е. сумма корней квадратнаго уравненія, у котораго коэф- фиціентъ при x^2 есть 1, равна коэффиціенту при неиз- вѣстномъ въ первой степени, взятому съ противоположнымъ знакомъ, а произведеніе корней этого уравненія равно его свободному члену.

Док. Каковы бы ни были корни α и β , они опредѣляются формулами:

$$\alpha = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad \beta = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Отсюда находимъ:

$$\alpha + \beta = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -p$$

$$\alpha\beta = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right).$$

Это произведеіе можно найти сокращеннымъ путемъ, основываясь на тождествѣ: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

$$\alpha\beta = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q.$$

Замѣчаніе. Если α и β суть корни уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, или, что то же, уравненія $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, то

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}; \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

Слѣдствіе. Не рѣшая квадратнаго уравненія, мы можемъ опредѣлить знаки его корней, если эти корни вещественные. Пусть, напр., имѣемъ уравненіе $x^2 + 8x + 12 = 0$. Такъ какъ въ этомъ примѣрѣ выраженіе $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ даетъ положительное число, то оба корня должны быть вещественные. Опредѣлимъ, не рѣшая уравненія, знаки этихъ корней. Для этого рассуждаемъ такъ: обращая вниманіе сначала на свободный членъ (+12), видимъ, что онъ имѣетъ знакъ +; значить, произведеіе корней должно быть положительнымъ, т.-е. оба корня имѣютъ одинаковые знаки. Чтобы опредѣлить, какіе именно, обратимъ вниманіе на коэффициентъ при x (т.-е. на +8); онъ имѣетъ знакъ +; слѣд., сумма коэффициентовъ отрицательна; поэтому одинаковые знаки у корней должны быть минусы.

Подобными рассужденіями нетрудно опредѣлить, знаки корней и во всякомъ другомъ случаѣ. Такъ, уравненіе $x^2 + 8x - 12 = 0$ имѣетъ корни съ разными знаками (потому что ихъ произведеіе отрицательно), при чемъ отрицательный корень имѣетъ большіе

шую абсолютную величину (потому что ихъ сумма отрицательна); уравненіе $x^2 - 8x - 12 = 0$ имѣетъ тоже корни съ разными знаками, но бoльшая абсолютная величина принадлежитъ положительному корню.

219. Обратная теорема. Если между 4 числами: α , β , p и q существуютъ такія двѣ зависимости: $p = -(\alpha + \beta)$ и $q = \alpha\beta$, то числа α и β суть корни уравненія $x^2 + px + q = 0$.

Д о к. Требуется доказать, что каждое изъ чиселъ α и β , при данныхъ въ теоремѣ условіяхъ, удовлетворяетъ уравненію $x^2 + px + q = 0$. Для этого подставимъ въ него на мѣсто p выраженіе $-(\alpha + \beta)$ и на мѣсто q произведеніе $\alpha\beta$:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

Преобразуя это уравненіе, послѣдовательно получаемъ:

$$\begin{aligned} x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta &= 0; & \alpha(x - \alpha) - \beta(x - \alpha) &= 0; \\ (x - \alpha)(x - \beta) &= 0. \end{aligned}$$

Если въ послѣднее уравненіе на мѣсто x подставимъ число α или число β , то замѣтимъ, что числа эти обращаютъ уравненіе въ тождество:

$$0 \cdot (\alpha - \beta) = 0 \text{ и } (\beta - \alpha) \cdot 0 = 0.$$

Слѣд., α и β суть корни уравненія $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ и, значить, также и корни равносильнаго уравненія $x^2 + px + q = 0$.

Слѣдствіе. По даннымъ корнямъ можно составить квадратное уравненіе. Пусть требуется составить уравненіе, котораго корни были бы 2 и -3 . Положивъ, что $p = -[2 + (-3)]$ и $q = 2 \cdot (-3)$, находимъ $p = 1$, $q = -6$. Значить, искомое уравненіе будетъ:

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Подобно этому найдемъ, что числа -2 и -2 суть корни уравненія $x^2 + 4x + 4 = 0$, числа 3 и 0 — корни уравненія $x^2 - 3x = 0$, и т. п.

220. Трехчленъ второй степени. Разложенія его на множителей первой степени. Выраженіе $ax^2 + bx + c$, въ которомъ x означаетъ произвольное

ч и с л о (перемѣнное), а a , b и c какія-нибудь данныя (постоянныя) числа, наз. трехчленомъ 2-й степени. Не должно смѣнивать трехчлена 2-й степени съ лѣвою частью уравненія $ax^2+bx+c=0$, такъ какъ въ трехчленѣ буква x означаетъ какое угодно число, тогда какъ въ уравненіи она означаетъ только тѣ числа, которыя удовлетворяютъ уравненію. Значенія x , обращающія трехчленъ въ 0, наз. его корнями; эти корни вмѣстѣ съ тѣмъ и корни уравненія $ax^2+bx+c=0$. Найдя ихъ, мы легко можемъ разложить трехчленъ на множители первой степени относительно x . Дѣйствительно, пусть эти корни будутъ α и β . Такъ какъ эти числа представляютъ собою корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, то по свойству корней квадратнаго уравненія будемъ имѣть:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ и } \alpha\beta=\frac{c}{a}; \text{ откуда } \frac{b}{a}=-(\alpha+\beta) \text{ и } \frac{c}{a}=\alpha\beta;$$

поэтому:

$$\begin{aligned} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta= \\ &=x(x-\alpha)-\beta(x-\alpha)=(x-\alpha)(x-\beta). \end{aligned}$$

Умноживъ обѣ части равенства на a , получимъ:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Такимъ образомъ, трехчленъ ax^2+bx+c разлагается на три множителя, изъ которыхъ первый равенъ коэффициенту при x^2 , второй есть разность между x и однимъ корнемъ трехчлена, а третій—разность между x и другимъ его корнемъ.

Трехчленъ x^2+px+q , у котораго коэффициентъ при x^2 есть 1, разлагается на 2 множителя первой степени относительно x :

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta).$$

Слѣдствіе. По 2 даннымъ корнямъ квадратнаго уравненія можно составить само это уравненіе (иначе, чѣмъ это было указано въ концѣ § 219); напр., уравненіе, имѣющее корни 4 и 5, есть $(x-5)(x-4)=0$; раскрывъ скобки и сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ, получимъ

$x^2 - 9x + 20 = 0$. Уравнение, имѣющее корни -2 и -1 , есть:
 $[x - (-2)][x - (-1)] = 0$, т. е. $(x + 2)(x + 1) = 0$ или $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Примѣръ 1. Разложить на множители трехчленъ

$$2x^2 - 2x - 12.$$

Рѣшивъ уравненіе: $2x^2 - 2x - 12 = 0$, мы найдемъ корни данного трехчлена; это будутъ 3 и -2 . Теперь выполнимъ разложеніе:

$$2x^2 - 2x - 12 = 2(x - 3)[x - (-2)] = 2(x - 3)(x + 2).$$

Примѣръ 2. Разложить на множители трехчленъ

$$3x^2 + x + 1.$$

Такъ какъ корни трехчлена суть

$$\frac{-1 + \sqrt{-11}}{6} \quad \text{и} \quad \frac{-1 - \sqrt{-11}}{6},$$

то
$$\begin{aligned} 3x^2 + x + 1 &= 3 \left(x - \frac{-1 + \sqrt{-11}}{6} \right) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{-11}}{6} \right) = \\ &= 3 \left(\frac{6x + 1 - \sqrt{-11}}{6} \right) \left(\frac{6x + 1 + \sqrt{-11}}{6} \right) = \\ &= \frac{1}{12} (6x + 1 - \sqrt{-11})(6x + 1 + \sqrt{-11}). \end{aligned}$$

Примѣръ 3. Разложить на множители

$$6abx^2 - (3b^3 + 2a^3)x + a^2b^2.$$

Найдя корни этого трехчлена, получимъ:

$$x_1 = \frac{b^2}{2a}, \quad x_2 = \frac{a^2}{3b}.$$

Поэтому:
$$\begin{aligned} 6abx^2 - (3b^3 + 2a^3)x + a^2b^2 &= 6ab \left(x - \frac{b^2}{2a} \right) \left(x - \frac{a^2}{3b} \right) = \\ &= 6ab \left(\frac{2ax - b^2}{2a} \right) \left(\frac{3bx - a^2}{3b} \right) = (2ax - b^2)(3bx - a^2). \end{aligned}$$

Примѣръ 4. Разложить на множители

$$(a^2-1)(b^2+1)-2b(a^2+1).$$

Замѣтивъ, что данное выраженіе есть трехчленъ 2-й степени относительно буквы b , расположимъ его по степенямъ этой буквы:

$$(a^2-1)b^2-2(a^2+1)b+(a^2-1).$$

Корни этого трехчлена будутъ (§ 216):

$$b_1 = \frac{a^2+1 + \sqrt{(a^2+1)^2 - (a^2-1)^2}}{a^2-1} = \frac{a^2+1+2a}{a^2-1} = \frac{a+1}{a-1},$$

$$b_{11} = \frac{a^2+1 - \sqrt{(a^2+1)^2 - (a^2-1)^2}}{a^2-1} = \frac{a^2+1-2a}{a^2-1} = \frac{a-1}{a+1}.$$

Слѣд., данный трехчленъ представится такъ:

$$(a^2-1) \left(b - \frac{a+1}{a-1} \right) \left(b - \frac{a-1}{a+1} \right) = [b(a-1) - (a+1)][b(a+1) - (a-1)] =$$

$$= (ab - b - a - 1)(ab + b - a + 1).$$

Примѣръ 5. Найти значеніе x , выражаемое дробью:

$$x = \frac{2a^2 - 2a - 12}{3a^2 + a - 10}$$

при $a = -2$ (см. § 146).

Подставивъ на мѣсто a число -2 , находимъ, что дробь принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. Для избѣжанія этой неопредѣленности, разложимъ числителя и знаменателя на множители. Такъ какъ корни числителя суть 3 и -2 , а корни знаменателя $\frac{5}{3}$ и -2 , то дробь представится такъ:

$$x = \frac{2(a-3)(a+2)}{3(a-\frac{5}{3})(a+2)}.$$

Мы видимъ теперь, что числитель и знаменатель нашей дроби имѣютъ общаго множителя $a+2$. Множитель этотъ при всѣхъ значеніяхъ a , не равныхъ -2 , не равенъ нулю; поэтому при всѣхъ такихъ значеніяхъ a дробь можно сократить на $a+2$:

$$x = \frac{2(a-3)}{3(a-\frac{5}{3})} = \frac{2a-6}{3a-5}.$$

Если по условіямъ вопроса, при рѣшеніи котораго получилась данная дробь, возможно допустить, чтобы величина x и при $a=-2$ выражалась тою же сокращенною дробью, каковою она выражается при $a \neq -2$,¹⁾ то тогда найдемъ:

$$x = \frac{2(-2)-6}{3(-2)-5} = \frac{-10}{-11} = \frac{10}{11}.$$

ГЛАВА II.

Нѣкоторые частные случаи квадратнаго уравненія.

221. Случай, когда коэффициентъ a очень малъ. Вычисленіе корней ур. $ax^2+bx+c=0$ по общей формулѣ затруднительно въ томъ случаѣ, когда коэффициентъ a очень малое число сравнительно съ b и c . Въ самомъ дѣлѣ, вычисляя корни по формулѣ:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

мы въ большинствѣ случаевъ должны довольствоваться приближенной величиной $\sqrt{b^2 - 4ac}$, а слѣд. и всего числителя. Раздѣливъ эту приближенную величину на $2a$, мы тѣмъ самымъ раздѣлимъ на $2a$ и погрѣшность, съ которой вычисленъ числитель формулы. Но такъ какъ, по предположенію, $2a$ очень малая дробь, а дѣленіе на малую дробь равносильно умноженію на большое число, то погрѣшность значительно возрастетъ, вслѣдствіе чего окончательный результатъ будетъ далекъ отъ истиннаго. Если, напримѣръ, $2a=0,0001$, и мы вычислили $\sqrt{b^2 - 4ac}$ до четвертаго десятичнаго знака, то предѣлъ погрѣшности въ окончательномъ результатѣ будетъ $0,0001 : 0,00001 = 10$.

Для вычисленія корней уравненія въ этомъ случаѣ употребляется болѣе удобный способъ такъ называемаго послѣдовательнаго приближенія.

Замѣтимъ, что при очень малой величинѣ a одинъ изъ корней уравненія немного отличается отъ $-\frac{c}{b}$, а другой—весьма большое число (по абсолютной своей величинѣ). Дѣйствительно, уравненіе $ax^2+bx+c=0$

¹⁾ Если напр., известно, что значеніе величины x при $a=-2$ должно служить предѣломъ тѣхъ значеній, которыя x получаетъ, когда a стремится къ равенству съ -2 .

авносильно такому уравненію:

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^2}=0,$$

отому можно придать видъ:

$$\frac{1}{x} \left(b + \frac{c}{x} \right) = -a.$$

Такъ какъ $-a$ близко къ нулю, то послѣднее уравненіе можетъ быть доведено такими значеніями x , при которыхъ одинъ изъ сомножителей лѣвой части уравненія окажется очень малымъ числомъ, а другой— очень большимъ; это будетъ имѣть мѣсто или тогда, когда придадимъ x весьма большое абсолютное значеніе, или же тогда, когда x будетъ близокъ къ $-\frac{c}{b}$.

Покажемъ, какъ вычислить тотъ изъ корней, который мало отличается отъ $-\frac{c}{b}$ (другой корень найдемъ, вычитая первый изъ $-\frac{b}{a}$)

Изъ уравненія выводимъ:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}. \quad (1)$$

Такъ какъ a очень малое число, а x и b не очень велики и не очень малы, то абсолютная величина дроби $\frac{ax^2}{b}$ очень мала. Пренебрегая этимъ членомъ, получимъ для x первое приближеніе:

$$x = -\frac{c}{b}.$$

Вставивъ это значеніе въ правую часть ур. (1), получимъ второе приближеніе, болѣе точное, чѣмъ первое:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^2}.$$

Вставивъ эту величину въ правую часть ур. (1), получимъ третье приближеніе, еще болѣе точное. Подобнымъ же путемъ можемъ получить, если нужно, четвертое и слѣдующія приближенія.

Примѣры. 1) Рѣшить уравненіе $0,003x^2+5x-2=0$.

$$x = \frac{2}{5} - \frac{0,003x^2}{5} = 0,4 - 0,0006x^2.$$

Первое приближеніе $= 0,4$. Это число болѣе истиннаго значенія x потому что намъ пришлось отбросить отрицательный членъ $-0,0006x^2$.

Второе приближеніе $= 0,4 - 0,0006 \cdot (0,4)^2 = 0,399904$. Это число менше истиннаго значенія x , потому что для полученія его мы подставили вмѣсто x^2 число, большее x^2 , отчего вычитаемое увеличилось, а разность уменьшилась.

Третье приближение $= 0,4 - 0,0006 \cdot (0,399904)^2 = 0,399904046\dots$; оно должно быть больше истинного значения, так как для получения его мы подставили на место x^2 число, меньше x^2 , отчего вычитаемое уменьшилось, а разность увеличилась. Четвертое приближение оказалось бы меньше истинного значения, и т. д.

$$\begin{aligned} & 0,4 > x > 0,399904 \\ \text{Такимъ образомъ,} & 0,399904 < x < 0,399904046. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что, взявъ вместо x первое приближение 0,4, съдѣлаемъ ошибку менѣе разности $0,4 - 0,399904$, т.-е. менѣе 0,0001. Взявъ вместо x второе приближение 0,399904, съдѣлаемъ ошибку менѣе разности $0,399904046\dots - 0,399904$, т.-е. менѣе 1-й десятичной. Такимъ образомъ, последовательныя приближенія оказываются все болѣе и болѣе точными.

Другой корень получается вычитаніемъ найденнаго корня изъ $\frac{-5}{6,003} = -1666, (6)$. Если для перваго корня возьмемъ число 0,4, то другой $= -1667,0(6)$.

$$\begin{aligned} 2) \text{ Рѣшить уравненіе } & 0,007x^2 - x + 2 = 0. \\ & x = 2 + 0,007x^2 \end{aligned}$$

Первое приближение $= 2$ (съ недостаткомъ).

Второе приближение $= 2 + 0,007 \cdot 2^2 = 2,028$ (съ недостаткомъ).

Третье приближение $= 2,028789488$ (съ недост.). Такъ какъ эти приближенія все съ недостаткомъ и идутъ, увеличиваясь, то, значитъ; они все болѣе и болѣе приближаются къ точной величинѣ x .

Сравнивая второе приближение съ третьимъ, видимъ, что у нихъ первые три десятичные знака одинаковы; отсюда заключаемъ, что, положивъ $x = 2,028$, съдѣлаемъ ошибку менѣе 0,001.

222. Случай, когда c очень малое число. Способъ последовательнаго приближенія применимъ и тогда, когда свободный членъ уравненія очень малое число сравнительно съ a и b . Въ этомъ случаѣ одинъ изъ корней близокъ къ $-\frac{b}{a}$, а другой — весьма малое число.

Въ этомъ нетрудно убѣдиться, если уравненію придать такой видъ:

$$x(ax+b) = -c.$$

Такъ какъ по предположенію, абсолютная величина $-c$ очень мала, то уравненіе, очевидно, удовлетворится при x , или очень близко къ 0, или мало отличающемся отъ $-\frac{b}{a}$.

Чтобы найти корень, имѣющій очень малую величину, представимъ уравненіе снова въ видѣ:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b} \tag{1}$$

Такъ какъ a и b суть числа не очень большія и не очень малыя, а абсолютная величина x^2 очень мала, то для перваго приближенія можно пренебречь членомъ $\frac{ax^2}{b}$; тогда получимъ:

$$x = -\frac{c}{b}.$$

Вставивъ это значеніе на мѣсто x въ правую часть уравненія (1), получимъ второе приближеніе; подобнымъ же образомъ найдемъ, если нужно, и слѣдующія приближенія.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $2x^2 + x - 0,003 = 0$.
 $x = 0,0003 - 2x^2$.

Первое приближеніе $= 0,003$ (съ избыткомъ).

Второе приближеніе $= 0,0003 - 2 \cdot (0,003)^2 = 0,002982$ (съ недостаткомъ).

Третье приближеніе $= 0,00298215352$ (съ избыткомъ).

Положивъ $x = 0,002982$, слѣдваемъ ошибку менѣе одной миллионной. Другой корень уравненія $= -0,5 - 0,002982 = -0,502982$.

ГЛАВА III.

Ислѣдованіе квадратнаго уравненія.

223. Когда корни бываютъ вещественные и когда они мнимые. Мы видѣли, что корни уравненія $ax^2 + bx + c = 0$ выражаются формулами:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Разсмотримъ, какія рѣшенія получаются изъ этихъ формулъ при различныхъ частныхъ значеніяхъ коэффициентовъ a , b и c .

Характеръ этихъ рѣшеній зависитъ отъ подкореннаго выраженія $b^2 - 4ac$ ¹⁾. Дѣйствительно, изъ формулъ видно, что:

- 1) если $b^2 - 4ac > 0$, то оба корня вещественные и неравные;
- 2) если $b^2 - 4ac = 0$, то корни вещественные и равные;
- и 3) если $b^2 - 4ac < 0$, то оба корня мнимые.

¹⁾ Это выраженіе наз. дискриминантомъ трехчлена $ax^2 + bx + c$

Полезно замѣтить, что когда числа a и c противоположныхъ знаковъ, то произведение ac представляетъ собою отрицательное число и, слѣд., выраженіе $-4ac$ есть тогда число положительное; такъ какъ, кромѣ того, при всякомъ численномъ значеніи коэффициента b , не равномъ нулю, число b^2 всегда положительно, то выраженіе b^2-4ac дастъ въ этомъ случаѣ положительное число, и поэтому оба корня должны быть вещественные неравные. Напр., мы можемъ утверждать заранѣе (*a priori*), что ур. $3x^2+2x-8=0$ имѣетъ вещественные неравные корни, такъ какъ первый и третій его коэффициенты имѣютъ противоположные знаки (корни этого уравненія суть $\frac{4}{3}$ и -2).

Вещественные корни квадратнаго уравненія могутъ быть оба положительные, или оба отрицательные, или одинъ положительный, а другой отрицательный. О значеніи этихъ рѣшеній здѣсь можетъ быть сказано то же самое, что говорилось раньше при изслѣдованіи уравненія первой степени.

Мнимые корни, конечно, означаютъ невозможность задачи, изъ условій которой выведено квадратное уравненіе.

224. Значенія общихъ формулъ корней квадратнаго уравненія при $a=0$. При выводѣ общей формулы для корней уравненія $ax^2+bx+c=0$ мы приводили его къ виду $x^2+px+q=0$, для чего намъ нужно было раздѣлить всѣ члены уравненія на a . Но дѣленіе на a возможно лишь въ томъ случаѣ, когда a не равно 0. Слѣд., формулы:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_{11} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

выведены въ предположеніи, что коэффициентъ a не равенъ 0, и потому, конечно, нельзя заранѣе требовать, чтобы онѣ давали вѣрные результаты и при $a=0$. Однако посмотримъ, во что онѣ обратятся при этомъ предположеніи. Подставивъ въ нихъ на мѣсто a нуль, получимъ:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2}}{0}, \quad x_{11} = \frac{-b - \sqrt{b^2}}{0}.$$

Такъ какъ знакомъ $\sqrt{\quad}$ мы условились обозначать только арифметическое значеніе корня, то $\sqrt{b^2}=b$ въ томъ случаѣ, когда b число положительное; если же b число отрицательное, то $\sqrt{b^2}=-b$ (напр., если $b=-5$, то $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=-(-5)$). Поэтому:

$$\begin{array}{l} \text{при } a=0 \\ \text{и при } b \text{ положительномъ} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-b+b}{0} = \frac{0}{0}, \\ x_{11} = \frac{-b-b}{0} = \frac{-2b}{0} = \infty, \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{при } a=0 \\ \text{и при } b \text{ отрицательномъ} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-b-b}{0} = \frac{-2b}{0} = \infty; \\ x_{11} = \frac{-b+b}{0} = \frac{0}{0}. \end{array} \right.$$

Значитъ, при $a=0$ общія формула даетъ для одного изъ корней неопредѣленное выраженіе $\frac{0}{0}$, а для другого — выраженіе ∞ . Между тѣмъ, когда $a=0$, квадратное уравненіе обращается въ уравненіе 1-й степени: $bx+c=0$, дающее для x только одно значеніе: $x=-\frac{c}{b}$. Мы видимъ такимъ образомъ, что общія формулы не даютъ правильнаго рѣшенія для случая, когда $a=0$.

224,а. Какъ измѣняются корни квадратнаго уравненія, когда коэффициентъ a приближается къ нулю. Поставимъ теперь такой вопросъ: если коэффициентъ a не равенъ 0, а только приближается къ 0 какъ угодно близко, то къ чему будутъ приближаться (къ какому предѣлу) величины корней квадр. уравненія? Пока $a \neq 0$ мы имѣемъ право примѣнять наши общія формулы. Изъ нихъ усматриваемъ, что, когда a приближаются къ 0, одинъ изъ корней долженъ увеличиваться (по абсолютной величинѣ) безгранично, а именно это будетъ x_{11} при $b > 0$ и x_1 при $b < 0$. Дѣйствительно, по мѣрѣ приближенія a къ 0 величина радикала $\sqrt{b^2-4ac}$ будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ $\sqrt{b^2}$,

т.-е. къ b , если это число положительно, и къ $-b$, если b число отрицательное; слѣд., числитель дроби, выведенной для x_{11} въ первомъ случаѣ, или для x_1 во второмъ случаѣ, будетъ стремиться къ $-2b$, тогда какъ знаменатель ея безпредѣльно уменьшается; при этихъ условіяхъ величина дроби должна безпредѣльно возрастать.

Что же касается другого корня (т.-е. x_1 при $b > 0$, или x_{11} при $b < 0$), то изъ общихъ формулъ мы прямо не усматриваемъ, къ чему стремится этотъ корень, когда a приближается къ 0; не усматриваемъ потому, что въ дроби, опредѣляющей этотъ другой корень, и числитель, и знаменатель оба приближаются къ 0, и потому о величинѣ самой дроби мы не можемъ ничего сказать опредѣленнаго. Попробуемъ преобразовать наши общія формулы такимъ образомъ, чтобы буква a не входила заразъ и въ числителя, и въ знаменателя дроби, а только въ одинъ какой-нибудь изъ этихъ членовъ. Такое преобразование возможно выполнить. Для этого стоитъ только дробь, опредѣляющую x_1 , освободить отъ радикала въ числитель такъ же приемомъ, какой былъ нами указанъ ранѣе (§ 210) для освобожденія отъ радикаловъ знаменателя дроби:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} \\ &= \frac{4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}. \end{aligned}$$

Сократить дробь на $2a$ мы имѣли право, такъ какъ число a мы предполагаемъ не равнымъ нулю, а только приближающимся къ нулю.

Подобно этому для x_{11} мы получимъ:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})} \\ &= \frac{4ac}{2a(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}. \end{aligned}$$

Изъ этихъ преобразованныхъ формулъ легко видѣть, что

когда a приближается къ 0, то при $b > 0$ величина x_1 и при $b < 0$ величина x_{11} приближаются все ближе и ближе къ числу $\frac{2c}{-2b}$, т.-е. къ числу $-\frac{c}{b}$.

Такимъ образомъ: если въ уравненіи $ax^2+bx+c=0$ коэффициентъ a приближается какъ угодно близко къ 0, то абсолютная величина одного изъ корней безпредѣльно увеличивается, а другой корень приближается къ числу $-\frac{c}{b}$.

Подтвержденіе этому мы увидимъ на слѣдующемъ численномъ примѣрѣ.

Примѣръ. Возьмемъ уравненіе $0,001x^2+8x-5=0$, въ которомъ коэффициентъ при x^2 очень малъ. Примѣняя сокращенную формулу (§ 216), получимъ:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+0,005}}{0,001} = \frac{-4 \pm \sqrt{16\ 005}}{0,001} = \frac{-4 \pm 4,000624\dots}{0,001}.$$

Откуда:

$$x_1 = \frac{0,000624\dots}{0,001} = 0,624\dots; \quad x_{11} = \frac{-8,000624\dots}{0,001} = -8000,624\dots$$

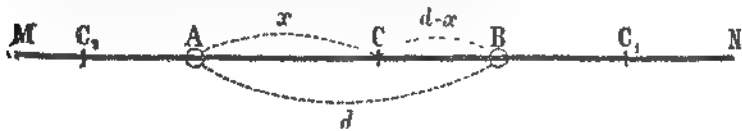
Мы видимъ, такимъ образомъ, что одинъ корень весьма близокъ къ числу $-\frac{c}{b}$, которое въ этомъ примѣрѣ равно $-\frac{5}{8} = +\frac{5}{8} = 0,625$; другой же корень имѣетъ очень большую абсолютную величину.

Если въ томъ же уравненіи еще уменьшимъ коэффициентъ при x^2 , напр., возьмемъ уравненіе такое: $0,0001x^2+8x-5=0$, то для x_1 получимъ число 0,6249, еще болѣе близкое къ $-\frac{c}{b}$, а для x_{11} найдемъ число $-80000,6249\dots$, абсолютная величина котораго еще больше.

225. Задача о двухъ источникахъ свѣта. Чтобы на примѣрѣ указать значеніе различныхъ случаевъ, какіе могутъ представиться при рѣшеніи квадратнаго уравненія, изслѣдуемъ слѣдующую задачу о двухъ источникахъ свѣта.

Задача. На прямой MN (черт. 26) въ точкахъ A и B паходятся два источника свѣта. Па разстояніи одного метра сила свѣта перваго источника равна a свѣчамъ, а сила свѣта втораго равна b свѣчамъ. Разстояніе между A и B равно d метрамъ. Найти на прямой MN такую точку, въ которой освѣщеніе отъ обоихъ источниковъ было бы одинаковое.

Искомая точка можетъ паходиться: или направо отъ A , или направо отъ A , при чемъ въ первомъ случаѣ она можетъ оказаться или между A и B , или за B . Сдѣлаемъ спачала предположеніе, что она паходится направо отъ A , между A и B ; напр., пусть это будетъ точка C , отстоящая отъ A на x футовъ.



Черт. 26.

Изъ физики извѣстно; что степень освѣщенія, при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ, обратно пропорціональна квадрату разстоянія отъ источника свѣта, т.-е., если освѣщаемый предметъ удалить отъ источника свѣта па разстояніе, въ 2 раза, 3 раза, 4 раза и т. д. большее, то степень освѣщенія уменьшится въ 4 раза, въ 9 разъ, въ 16 разъ и т. д. Согласно этому закону, если бы точка C отстояла отъ A только па 1 метрѣ, то она освѣщалась бы этимъ источникомъ такъ, какъ-будто па нее падали лучи отъ a свѣчей; но такъ какъ она отстоитъ отъ A на x метр., то степень ея освѣщенія этимъ источникомъ будетъ $\frac{a}{x^2}$. Подобнымъ же разсужденіемъ найдемъ, что точка C , отстоя отъ источ-

ника свѣта B на $d-x$ метр., будетъ освѣщаться имъ съ силою $\frac{b}{(d-x)^2}$. Вопросъ задачи требуетъ, чтобы

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2} \quad (1)$$

Таково будетъ уравненіе, если равноосвѣщенная точка лежитъ между A и B . Допустимъ теперь, что она находится направо отъ B (напр., въ C_1), на разстояніи x отъ A . Тогда, попрежнему, степень освѣщенія ея источникомъ A будетъ $\frac{a}{x^2}$; отъ источника B точка C_1 находится на разстояніи $x-d$ метр.; поэтому степень освѣщенія ея этимъ источникомъ выразится $\frac{b}{(x-d)^2}$, и уравненіе будетъ:

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(x-d)^2} \quad (2)$$

Сравнивая это уравненіе съ ур. (1), находимъ, что они одинаковы, такъ какъ $(d-x)^2 = (x-d)^2$. Замѣтивъ это, можемъ утверждать, что уравненіе (1) включаетъ въ себѣ и этотъ второй случай: если окажется, что уравненію (1) можетъ удовлетворить такое значеніе x , которое больше d (разстояніе между A и B), то это значеніе x и будетъ означать разстояніе отъ A до C_1 .

Теперь сдѣлаемъ третье предположеніе, что искомая точка находится нѣлѣво отъ A ; пусть это будетъ точка C_2 , отстоящая отъ A на x футовъ. Тогда степень освѣщенія ея источникомъ A равна $\frac{a}{x^2}$, а источникомъ B равна $\frac{b}{(d+x)^2}$; слѣд., для этого случая мы будемъ имѣть уравненіе:

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d+x)^2} \quad (3)$$

Это уравненіе можно получить изъ ур. (1), если въ последнемъ замѣнимъ x на $-x$. Дѣйствительно, сдѣлавъ такую замѣну, получимъ:

$$\frac{a}{(-x)^2} = \frac{b}{[d-(-x)]^2}$$

Но $(-x)^2 = x^2$ и $d - (-x) = d + x$; слѣд., получившееся послѣ замѣны уравненіе и есть ур. (3).

Теперь мы можемъ утверждать, что уравненіе (1) соотвѣтствуетъ всѣмъ тремъ предположеніямъ, если только допустимъ, что буква x въ немъ есть а л г е б р а и ч е с к о е число, т.-е. что она можетъ означать и положительное число, и отрицательное (и нуль). Если, рѣшивъ это уравненіе, мы увидимъ, что ему удовлетворяетъ какое-нибудь положительное число, то это число будетъ означать разстояніе искомой точки отъ A п а п р а в о, при чемъ она можетъ лежать или между A и B , или за B , смотря по тому, будетъ ли это положительное число меньше числа d , или больше его; если же уравненію (1) будетъ удовлетворять какое-нибудь отрицательное число, то это будетъ означать, что равноосвѣщенная точка находится н а лѣ в о отъ A на разстояніи, равномъ абсолютной величинѣ этого отрицательнаго числа.

Рѣшимъ теперь уравненіе (1):

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}; \quad a(d-x)^2 = bx^2;$$

$$ad^2 - 2adx + ax^2 = bx^2; \quad (a-b)x^2 - 2adx + ad^2 = 0.$$

Такъ какъ коэффициентъ при x дѣлится на 2, то по сокращенной формулѣ (§ 216) находимъ:

$$x = \frac{ad \pm \sqrt{a^2d^2 - (a-b)ad^2}}{a-b} = \frac{ad \pm d\sqrt{ab}}{a-b}.$$

Если примемъ во вниманіе, что $a = (\sqrt{a})^2$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ и $b = (\sqrt{b})^2$, то въ числитель полученной дроби мы можемъ вынести за скобки $d\sqrt{a}$, а знаменателя можемъ разложить на 2 множителя:

$$x = \frac{d\sqrt{a}(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}.$$

$$\text{Слѣдовательно: } x_1 = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}, \quad x_{11} = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Такъ какъ, освобождая уравненіе отъ знаменателей, мы должны были умножить обѣ части его на выраженіе $x^2(d-x)^2$, содержащее неизвѣстное, то мы должны еще рѣшить вопросъ, не ввели ли мы тѣмъ самымъ постороннихъ рѣшеній, обращающихъ въ нуль выраженіе, на которое умножали. Это выраженіе обращается въ нуль при $x=0$ и при $x=d$; ни то, ни другое изъ этихъ значений x не значится въ числѣ найденныхъ нами рѣшеній квадратнаго уравненія; значитъ, постороннихъ рѣшеній мы не ввели ¹⁾.

Разсмотримъ теперь различные случаи, какіе могутъ представиться при тѣхъ или другихъ численныхъ значеніяхъ буквъ a , b и d . Прежде всего находимъ, что такъ какъ эти числа по смыслу своему положительныя, то мнимыхъ рѣшеній въ нашей задачѣ быть не можетъ (подъ знакомъ радикала стоятъ лишь числа a и b). Всѣхъ различныхъ случаевъ можетъ представиться пять:

1) Если $a > b$, то оба корня положительныя, при чемъ такъ какъ $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, то $x_1 > d$, а $x_{II} < d$.

Значитъ, въ этомъ случаѣ двѣ точки удовлетворяютъ вопросу задачи; обѣ онѣ расположены направо отъ A , одна между A и B , другая за B .

2) Если $a < b$, то x_I отрицательное число, а x_{II} положительное, при чемъ $x_{II} < d$. Положительное рѣшеніе показываетъ, что искомая точка лежитъ направо отъ A , именно между A и B ; отрицательное же рѣшеніе означаетъ, что есть еще другая равноосвѣщенная точка, лежащая на-

¹⁾ Кроме того, мы должны рѣшить еще вопросъ, имѣетъ ли данное уравненіе особаго корня $x = \infty$ (см. § 114). Приведемъ члены уравненія къ одному знаменателю и перенесемъ ихъ въ одну часть, получимъ уравненіе:

$$\frac{a'd - x^2 - bx^2}{x^2(d-x)^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{(a - bx)^2 - 2adx + ad^2}{x^4 - 2dx^2 + d^2x^2} = 0.$$

Такъ какъ степень знаменателя выше степени числителя, то уравненіе сверхъ корней, разсмотрѣнныхъ выше, имѣетъ еще корень, $x = \pm \infty$. Это третье рѣшеніе разсматриваемой задачи означаетъ, что если брать точки, все болѣе и болѣе удаленныя отъ A направо или влѣво, то разность освѣщеній въ этихъ точкахъ двумя источниками свѣта будетъ все болѣе и болѣе уменьшаться, приближаясь къ 0.

лѣво отъ A на разстояніи, равномъ абсолютной величинѣ отрицательнаго рѣшенія.

3) Если $a=b$, то $x_1=\pm\infty$ и $x_{II}=\frac{d}{2}$. Второе рѣшеніе означаетъ, что при равенствѣ силъ источниковъ свѣта равноосвѣщенная точка должна лежать посрединѣ между ними; первое же рѣшеніе показываетъ, что по мѣрѣ того, какъ a приближается къ равенству съ b , искомая точка безпредѣльно удаляется или направо отъ A , или налѣво отъ A , смотря по тому, будетъ ли a , приближаясь къ b , оставаться больше или меньше b ; при этомъ другая равноосвѣщенная точка будетъ приближаться все болѣе и болѣе къ серединѣ разстоянія между A и B .

4) Если $d=0$, и при чемъ $a\neq b$, то $x_1=x_{II}=0$. Это значитъ, что если разстояніе между двумя неравными источниками свѣта уменьшается, приближаясь къ 0, то обѣ равноосвѣщенные точки неограниченно приближаются къ источнику A .

5) Если $d=0$ и $a=b$, то $x_1=\frac{0}{0}$, $x_{II}=0$. Такъ какъ числитель и знаменатель дроби, опредѣляющей величину x_1 , не содержатъ никакого общаго множителя, обращающагося въ 0 при сдѣланныхъ предположеніяхъ, то надо ожидать, что значеніе x_1 означаетъ неопредѣленность задачи. И дѣйствительно, если источники свѣта одинаковой силы и помѣщены въ одномъ мѣстѣ, то всякая произвольная точка будетъ ими одинаково освѣщена.

ГЛАВА IV.

Комплексныя числа.

226. Цѣль введенія въ алгебру мнимыхъ чиселъ. Корень четной степени изъ отрицательнаго числа, какъ мы видѣли (§ 165, IV), не можетъ быть выраженъ ни положительнымъ, ни отрицательнымъ числомъ; такой корень называется мнимымъ числомъ.

Введеніе въ алгебру мнимыхъ чиселъ вызвано соображеніями, подобными тѣмъ, по которымъ въ нее допущены отрицательныя числа: и тѣ, и другія имѣютъ цѣлью обобщить нѣкоторыя алгебраическія предложенія и формулы. Напр., допустивъ мнимыя числа, мы можемъ принимать, что квадратъ

ное уравненіе имѣеть всегда два корня, что трехчленъ 2-й степени разлагается всегда на два множителя первой степени, и т. п. Особенно важное значеніе имѣють мнимыя числа въ теоріи уравненій высшихъ степеней.

Замѣтимъ, что корень всякой четной степени изъ отрицательнаго числа сводится къ нахожденію корня изъ квадратнаго корня изъ отрицательнаго числа; такъ $\sqrt[6]{-2} = \sqrt[3]{\sqrt{-2}}$ и вообще $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[n]{\sqrt{-a}}$. Поэтому въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ говорить только о квадратномъ корнѣ изъ отрицательнаго числа.

227. Условія, подъ которыми вводятъ мнимыя числа. Этихъ условій два:

- 1) согласилась разсматривать $\sqrt{-a}$, гдѣ $-a$ какое угодно отрицательное число, какъ число особаго рода, квадратъ котораго равенъ $-a$;
- 2) согласилась производить надъ мнимыми числами дѣйствія и преобразованія по тѣмъ же правиламъ, по какимъ они производятся надъ числами вещественными, принимая всегда, что $(\sqrt{-a})^2 = -a$.

228. Приведеніе $\sqrt{-a}$ къ виду $\sqrt{a} \sqrt{-1}$. Мнимое число вида $\sqrt{-a}$ можно замѣнить другимъ: $\sqrt{a} \sqrt{-1}$. Дѣйствительно, $\sqrt{-a}$, согласно первому условію, есть такое число, квадратъ котораго равенъ $-a$. Но $\sqrt{a} \sqrt{-1}$ также есть такое число, квадратъ котораго равенъ $-a$, потому что, применяя къ этому выраженію правило о возвышеніи въ степень произведенія (согласно второму условію), получимъ:

$$(\sqrt{a} \sqrt{-1})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{-1})^2 = a (-1) = -a.$$

Условились сокращенно обозначать выраженіе $\sqrt{-1}$ одною буквою i (начальная буква слова *imaginaire*, что значитъ мнимый). Такимъ образомъ, пишутъ:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \sqrt{-1} = 2i; \quad \sqrt{-3} = \sqrt{3} \sqrt{-1} = i \sqrt{3}.$$

Приведеніе мнимаго числа къ виду, содержащему множителя i , слѣдѣ обозначаетъ мнимость радикала, которая безъ того можетъ быть не вполне явною.

229. Комплексныя числа. Общій видъ всякаго вещественнаго или мнимаго числа есть $a+bi$, гдѣ a и b суть какія-либо вещественныя числа, положительныя, отрицательныя, или равныя нулю, а i обозначеніе $\sqrt{-1}$. Число вида $a+bi$ назъ комплекснымъ числомъ¹

¹) Слово «комплексный» означаетъ по-русски «сложный» «составной»; такое названіе числу вида $a+bi$ было дано впервые нѣмецкимъ математикомъ Гауссомъ (1777—1855). Названіе «мнимый» (*imaginaire*) было введено французскимъ математикомъ Декартомъ въ 1637 г.

въ немъ a есть вещественная часть, bi мнимая часть. При $a=0$ оно обращается въ мнимое число $bi=ib\sqrt{-1} = i\sqrt{-b^2}$, при $b=0$ оно даетъ $a+0.i$, что равно одному вещественному числу a , такъ какъ произведение $0.i$, согласно условію второму § 227-го, должно приниматься равнымъ нулю.

Два комплексныхъ числа вида $a+bi$, $a-bi$ наз. сопряженными. Подъ такимъ видомъ представляются корни квадратнаго уравненія, когда они мнимые. Два комплексныхъ числа вида $a+bi$ — $a-bi$ наз. противоположными.

230. Основное начало, которому должны быть подчинены комплексныя числа. Условившись надъ комплексными числами производить дѣйствія и преобразованія по правиламъ, выведеннымъ для вещественныхъ чиселъ, при условіи, что $i^2 = -1$, мы должны будемъ подчинить комплексныя числа слѣдующему началу:

Для того, чтобы комплексное число $a+bi$ равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы $a=0$ и $b=0$.

Хотя предложеніе это можно было бы разсматривать, какъ условіе, которое мы ставимъ относительно комплекснаго числа, и которое, слѣд., не нуждается въ доказательствѣ, однако полезно обнаружить, что оно не находится въ противорѣчій съ поставленными нами выше двумя условіями (§ 227), а составляетъ естественное слѣдствіе ихъ. Дѣйствительно, положимъ, что $a+bi=0$. Тогда, совершая надъ этимъ равенствомъ преобразованія, дозволительныя для равенствъ съ вещественными числами, и принимая $i^2 = -1$, мы будемъ имѣть:

$$a = -bi; a^2 = (-bi)^2 = b^2i^2 = -b^2, a^2 + b^2 = 0.$$

Такъ какъ a^2 и b^2 суть числа положительныя, а сумма двухъ положительныхъ чиселъ равняется нулю только тогда, когда каждое изъ нихъ отдѣльно равно нулю, то, значитъ, необходимо: $a=0$, $b=0$. Обратное, если положимъ, что $a=0$ и $b=0$, то $a+bi=0+0.i$; принимая умноженіе на нуль и сложеніе съ нулемъ въ томъ же условномъ смыслѣ, какой принять для вещественныхъ чиселъ, мы должны принять, что $0+0.i=0$.

Слѣдствіе. Для того, чтобы числа $a+bi$ и $a'+b'i$ были равны, необходимо и достаточно, чтобы $a=a'$ и $b=b'$.

Дѣйствіемъ по, если $a+bi=a'+b'i$, то $(a-a')+(b-b')i=0$ и, слѣдовательно, $a-a'=0$ и $b-b'=0$, т.е. $a=a'$ и $b=b'$.

Обратно, если $a=a'$ и $b=b'$, то число $a+bi$ мы должны принимать равнымъ числу $a'+b'i$, такъ какъ эти комплексныя выраженія въ этомъ случаѣ ничѣмъ другъ отъ друга не отличаются.

Изъ равенства комплексныхъ чиселъ непосредственно слѣдуетъ, что если 2 числа равны одному и тому же 3-му, то они равны и между собою.

Замѣчаніе. Относительно комплексныхъ чиселъ не принято никакого соглашенія, какое изъ нихъ считать бѣльшимъ и другимъ.

231. Дѣйствія надъ комплексными числами. Чтобы произвести какое-нибудь дѣйствіе надъ мнимыми числами, надо прежде всего каждое изъ нихъ привести къ виду комплекснаго числа $a+bi$, затѣмъ произвести дѣйствія надъ двучленами такого вида по тѣмъ правиламъ, которыя выведены были для двучленовъ съ вещественными членами (согласно условію второму § 227 го и наконецъ, въ результатѣ замѣнить вездѣ i^2 черезъ -1 (согласно условію первому того же §).

$$\begin{aligned} \text{Сложеніе. } (a+bi) + (a_1+b_1i) &= (a+a_1) + (b+b_1)i; \\ (a+bi) + (a_1+b_1i) + (a_2+b_2i) &= (a+a_1+a_2) + (b+b_1+b_2)i. \end{aligned}$$

Откуда легко усмотрѣть, что сумма комплексныхъ чиселъ обладаетъ тѣми же свойствами, какія принадлежатъ суммѣ вещественныхъ чиселъ (§ 20) т. е. свойствами перемѣстительнымъ и сочетательнымъ.

$$\text{Вычитаніе. } (a+bi) - (a_1+b_1i) = (a-a_1) + (b-b_1)i.$$

Откуда видно, что къ вычитанію комплексныхъ чиселъ можно примѣнять общее правило вычитанія алгебраическихъ чиселъ (§ 23), т. е., чтобы вычесть какое-нибудь число, достаточно прибавить число противоположное; такъ, вмѣсто того, чтобы отъ $a+bi$ вычесть a_1+b_1i , можно къ $a+bi$ прибавить $-a_1-b_1i$.

Замѣтимъ, что сумма или разность двухъ комплексныхъ чиселъ можетъ иногда оказаться числомъ вещественнымъ (напр., сумма сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ).

$$\begin{aligned} \text{Умноженіе. } (a+bi)(a_1+b_1i) &= aa_1 + a_1bi + ab_1i + bb_1i^2 = (aa_1 - bb_1) + \\ &+ (a_1b + ab_1)i. \end{aligned}$$

Подобнымъ образомъ можно составить произведеніе трехъ и болѣе комплексныхъ чиселъ.

Легко убѣдиться (повѣркой), что произведеніе комплексныхъ чиселъ такъ же, какъ и вещественныхъ (§ 36), обладаетъ свойствами: перемѣстительнымъ, сочетательнымъ и распределительнымъ (относительно сложенья). Напр., чтобы проверить послѣднее свойство, выражаемое равенствомъ:

$$[(a+bi) + (a_1+b_1i)](a_2+b_2i) = (a+bi)(a_2+b_2i) + (a_1+b_1i)(a_2+b_2i),$$

выполнимъ дѣйствія, указанныя въ каждой части этого равенства. Лѣвая часть даетъ:

$$\begin{aligned} [(a+a_1)a_2 - (b+b_1)b_2] + [(b+b_1)a_2 + (a+a_1)b_2]i &= (aa_2 + a_1a_2 - bb_2 - b_1b_2) + \\ &+ (ba_2 + b_1a_2 + ab_2 + a_1b_2)i. \end{aligned}$$

Въ правой части получается то же самое выраженіе.

Проверимъ еще слѣдующее важное свойство произведенія:

Для того, чтобы произведеніе комплексныхъ чиселъ равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одно изъ этихъ чиселъ равнялось нулю.

Дѣйствительно, если $(a+bi)(a_1+b_1i)=0$,
 то $(aa_1 - bb_1) + (a_1b + ab_1)i = 0$
 и слѣд.,
$$\begin{cases} aa_1 - bb_1 = 0, \\ a_1b + ab_1 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Умноживъ первое уравненіе этой системы на a и второе на b , сложимъ ихъ:

$$a^2a_1 + b^2a_1 = 0 \text{ или } a_1(a^2 + b^2) = 0. \quad (2)$$

Умноживъ первое уравненіе системы (1) на b и второе на a , вычтемъ изъ второго первое:

$$a^2b_1 + b^2b_1 = 0 \text{ или } b_1(a^2 + b^2) = 0. \quad (3)$$

Изъ равенствъ (2) и (3) заключаемъ, что или $a^2 + b^2 = 0$, или $a_1 = 0$, $b_1 = 0$. Если первое, то $a = 0$ и $b = 0$ и, слѣд., $a + bi = 0$; если второе, то $a_1 + b_1i = 0$.

Обратно, пусть $a + bi = 0$, т.-е. $a = 0$ и $b = 0$; но тогда и $aa_1 - bb_1 = 0$, и $a_1b + ab_1 = 0$; слѣд., и произведеніе $(a + bi)$ на $(a_1 + b_1i)$ равно 0.

Замѣтимъ, что произведеніе двухъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ $(a + bi)(a - bi)$ равно положительному вещественному числу $a^2 + b^2$.

Дѣленіе. Обозначимъ частное $(a + bi) : (a_1 + b_1i)$ черезъ $x + yi$, гдѣ x и y предположимъ вещественными числами. Тогда, по опредѣленію дѣленія, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i)(x + yi) &= a + bi, \\ (a_1x - b_1y) + (b_1x + a_1y)i &= a + bi, \end{aligned}$$

т.-е.

$$\text{Откуда: } \begin{cases} a_1x - b_1y = a, \\ b_1x + a_1y = b. \end{cases}$$

Умноживъ первое уравненіе на a_1 , а второе на b_1 и сложивъ оба уравненія, получимъ:

$$(a_1^2 + b_1^2)x = aa_1 + bb_1 \text{ и } x = \frac{aa_1 + bb_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Умноживъ первое уравненіе на b_1 , а второе на a_1 и вычти изъ второго первое, получимъ:

$$(a_1^2 + b_1^2)y = a_1b - ab_1 \text{ и } y = \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Формулы, найденныя для x и y , даютъ возможное рѣшеніе, если только $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, т.-е. если a_1 и b_1 не равны одновременно нулю; другими словами, если дѣлитель $a_1 + b_1i$ не равенъ нулю.

Въ этомъ случаѣ, слѣд., будемъ имѣть:

$$(a + bi) : (a_1 + b_1i) = \frac{aa_1 + bb_1}{a_1^2 + b_1^2} + i \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Замѣчаніе. Это же частное мы могли бы получить проще, умноживъ въ дробѣ $\frac{a + bi}{a_1 + b_1i}$ числителя и знаменателя на комплексное число $a_1 - b_1i$,

сопряженное съ знаменателемъ:

$$\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_2+b_2i)(a_1-b_1i)} = \frac{aa_1 - bb_1i^2 + (a_1b - ab_1)i}{a_1^2 - (b_1i)^2} = \frac{aa_1 + bb_1 + (a_1b - ab_1)i}{a_1^2 + b_1^2} =$$

$$= \frac{aa_1 + bb_1}{a_1^2 + b_1^2} + i \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Возвышеніе въ степень. Предварительно найдемъ результаты отъ возвышенія въ степень мнимаго числа i , зная, что, согласно условію, i^2 должно приниматься равнымъ -1 .

$$i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i; i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = +1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = (+1)i = i; i^6 = i^4 \cdot i^2 = (+1)(-1) = -1; i^7 = i^4 \cdot i^3 = (+1)(-i) = -i, \text{ и т. д.}$$

Такимъ образомъ, послѣдовательныя степени i даютъ повторяющіеся результаты, а именно, слѣдующіе четыре: $i, -1, -i, +1$. Чтобы узнать, какой изъ этихъ результатовъ получится при возвышеніи i въ степень съ показателемъ n , достаточно раздѣлить n на 4 и обратить вниманіе только на остатокъ отъ дѣленія. Такъ:

$$i^{27} = i^{4 \cdot 6 + 3} = i^3 = -i,$$

$$i^{17} = i^{4 \cdot 4 + 1} = i.$$

Замѣтимъ еще, что i^0 мы будемъ принимать равнымъ 1.

Теперь легко найдемъ результаты возвышенія $a+bi$ въ степень съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ; такъ:

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

$$(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2(bi) + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i \text{ и т. д.}$$

Извлеченіе квадратнаго корня. Положимъ, что

$$\sqrt{a+bi} = x+yi.$$

$$a+bi = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Откуда:

Слѣд.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases} \quad (1)$$

Вопросъ приводится къ нахожденію вещественныхъ корней этой системы. Возвысивъ оба уравненія въ квадратъ и затѣмъ сложивъ ихъ, получимъ:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2 \text{ и } x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(Знакъ $--$ передъ радикаломъ отброшенъ, такъ какъ при вещественныхъ значеніяхъ x и y выраженіе $x^2 + y^2$ не можетъ быть отрицательнымъ). Возьмемъ послѣднее уравненіе совместно съ первымъ уравненіемъ системы (1); складывая ихъ и вычитая, получимъ:

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \text{ и } x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}},$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \text{ и } y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Изъ второго уравненія системы (1) усматриваемъ, что знаки u и v должны быть одинаковые, если $b > 0$, и разные, если $b < 0$. Поэтому:

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right] \text{ при } b > 0$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right] \text{ при } b < 0$$

Примѣры:

$$1) \sqrt{5+12\sqrt{-1}} = \sqrt{5+12i} = \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}} \right] =$$

$$= \pm \left(\sqrt{\frac{18}{2}} + i \sqrt{\frac{8}{2}} \right) = \pm (\sqrt{9} + i \sqrt{4}) = \pm (3+2i).$$

$$2) \sqrt{-1} = \sqrt{-1} = \sqrt{0+1 \cdot i} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}} \right) =$$

$$= \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + i \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \pm \left(\frac{\sqrt{2} + i \sqrt{2}}{2} \right).$$

$$3) \sqrt{-\sqrt{-1}} = \sqrt{-i} = \sqrt{0-1 \cdot i} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}} \right) =$$

$$= \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - i \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \pm \left(\frac{\sqrt{2} - i \sqrt{2}}{2} \right).$$

Замѣчаніе. Чтобы изъ комплексныхъ чиселъ можно было извлечь корень третьей или высшей степени, нѣтъ надо придать иной видъ (тригонометрическій), о чемъ мы здѣсь говорить не будемъ.

232. Приведемъ два примѣра, показывающіе, какъ просто иногда доказываются некоторыя истинны при помощи комплексныхъ чиселъ.

Теорема 1. Если данное число есть сумма двухъ квадратовъ, то и квадратъ его есть также сумма двухъ квадратовъ.

Пусть $N = a^2 + b^2$, замѣтивъ, что $a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$ можемъ писать:

$$N^2 = (a+bi)^2(a-bi)^2 = (a^2 - b^2 + 2abi)(a^2 - b^2 - 2abi) = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 =$$

$$= (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2.$$

Теорема, такимъ образомъ, доказана.

Теорема 2. Произведеніе двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое есть сумма двухъ квадратовъ, также равно суммѣ двухъ квадратовъ.

Пусть $N = a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$ и $N_1 = a_1^2 + b_1^2 = (a_1+b_1i)(a_1-b_1i)$.

Въ такомъ случаѣ:

$$NN_1 = (a+bi)(a-bi)(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)$$

Помноживъ въ этомъ произведеніи перваго сомножителя на третьяго, а втораго на четвертаго, найдемъ:

$$NN_1 = [aa_1 - bb_1 + (ab_1 + ba_1)i] [aa_1 - bb_1 - (ab_1 + ba_1)i] = \\ = (aa_1 - bb_1)^2 + (ab_1 + a_1b)^2. \quad (1)$$

Теорема, такимъ образомъ, доказана.

Если въ томъ же произведеніи помножимъ перваго сомножителя на четвертаго, а втораго на третьяго, то получимъ:

$$NN_1 = [aa_1 + bb_1 + (a_1b - ab_1)i] [aa_1 + bb_1 - (a_1b - ab_1)i] = \\ = (aa_1 + bb_1)^2 + (a_1b - ab_1)^2. \quad (2)$$

Равенства (1) и (2) показываютъ, что произведеніе NN_1 можетъ быть разложено на сумму двухъ квадратовъ двоякимъ образомъ.

ГЛАВА V.

Освобожденіе уравненія отъ радикаловъ.

233. Теорема. Отъ возвышенія обѣихъ частей уравненія въ одну и ту же степень получаемъ новое уравненіе, которое, сверхъ корней перваго уравненія, можетъ имѣть еще и посторонніе корни.

Д о к. Пусть имѣемъ уравненіе $A=B$. Возвысимъ обѣ его части въ одну и ту же степень, напр., въ квадратъ. Тогда получимъ: $A^2=B^2$. Представимъ это уравненіе въ такомъ видѣ:

$$A^2 + B^2 = 0 \text{ или } (A-B)(A+B) = 0.$$

Чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ сомножителей равнялся нулю; значитъ, послѣднее уравненіе удовлетворяется и такими значеніями x , при которыхъ $A-B=0$, и такими, при которыхъ $A+B=0$. Первые значенія удовлетворяютъ данному уравненію, такъ какъ если $A-B=0$, то это значитъ, что $A=B$. Вторыя значенія x окажутся посторонними для даннаго уравненія, такъ какъ если $A+B=0$, то это значитъ, что $A=-B$, тогда какъ данное уравненіе требуетъ, чтобы $A=B$.

Вообще, возвысивъ обѣ части уравненія $A=B$ въ n -ую степень, получимъ:

$$A^n = B^n \text{ или } A^n - B^n = 0.$$

Разность одинаковых степеней двух чисел может быть представлена въ видѣ произведенія двухъ множителей (§ 79):

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + BA^{n-2} + B^2A^{n-3} + \dots + B^{n-1}).$$

Слѣд., данное уравненіе распадается на два уравненія:

$$A - B = 0 \text{ и } A^{n-1} + BA^{n-2} + B^2A^{n-3} + \dots + B^{n-1} = 0$$

Первое изъ нихъ есть данное уравненіе; второе доставляетъ постороннія рѣшенія. Если случится, что это второе уравненіе совсѣмъ не имѣетъ рѣшеній, то тогда постороннихъ рѣшеній не будетъ.

Примѣръ.

Уравненіе $3x - 2 = 2x$ имѣетъ одинъ корень $x = 2$. Послѣ возвышенія его частей въ квадратъ, получаемъ новое уравненіе

$$(3x - 2)^2 = (2x)^2, \text{ т. е. } 9x^2 - 12x + 4 = 4x^2,$$

или

$$5x^2 - 12x + 4 = 0,$$

которое имѣетъ два корня (§ 216):

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{5} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{5} = \frac{6 \pm 4}{5};$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{2}{5}.$$

Первый корень удовлетворяетъ данному уравненію, а второй для него посторонній; онъ удовлетворяетъ взмѣненному уравненію:

$$3x - 2 = -2x.$$

Слѣдствіе. Если для рѣшенія уравненія приходится обѣ его части возвысить въ одну и ту же степень, то, найдя корни полученнаго уравненія, мы должны особымъ изслѣдованіемъ опредѣлить, какіе изъ нихъ годятся для даннаго уравненія; для этого каждый изъ корней подставляемъ въ данное уравненіе и такимъ образомъ находимъ тѣ изъ нихъ, которые обращаютъ это уравненіе въ тождество.

234. Рѣшеніе уравненія, въ которомъ неизвѣстное входитъ подъ знаки радикаловъ. Чтобы рѣшить такое уравненіе, его должно предварительно освободить отъ радикаловъ. Ограничимся указа-

нiемъ, какъ это достигнуть въ двухъ простѣйшихъ случаяхъ.

Замѣтимъ, что во всѣхъ приводимыхъ ниже примѣрахъ знакъ $\sqrt{\quad}$ означаетъ ариметическое значенiе корня.

Случай 1, когда уравненiе содержитъ только одинъ радикалъ какой-нибудь степени. Переносить всѣ рациональные члены въ одну часть уравненiя, оставивъ радикалъ въ другой (уединяютъ радикалъ); затѣмъ возвышаютъ обѣ части уравненiя въ степень, показатель которой равенъ показателю радикала.

Примѣръ 1. $\sqrt{x+7}-x-1=0.$

Уединимъ радикалъ: $\sqrt{x+7}=x+1.$

Возвысимъ обѣ части уравненiя въ квадратъ: $x+7=x^2+2x+1.$ Рѣшивъ это уравненiе, получимъ; $x_1=2, x_2=-3.$ Испытавъ эти значенiя, находимъ, что данному уравненiю удовлетворяетъ только x_1 ; второе рѣшенiе принадлежитъ уравненiю: $-\sqrt{x+7}=x+1.$

Примѣръ 2. $1+\frac{2}{\sqrt{x^2-9}}=0.$

Приведи уравненiе къ цѣлому виду и уединивъ радикалъ, получимъ: $\sqrt{x^2-9}=-2.$ Возвысивъ обѣ части въ четвертую степень, найдемъ:

$$x^2-9=16; \text{ откуда: } x=\pm 5.$$

Ни одно изъ этихъ рѣшенiй не удовлетворяетъ данному уравненiю. Оба они принадлежатъ ур. $-\sqrt{x^2-9}=-2.$

Примѣръ 3. $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{5}{x^4}}}.$

Возвысимъ обѣ части уравненiя въ квадратъ и отбросимъ въ обѣхъ частяхъ одинаковые члены $\frac{1}{a^2}$:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{ax}=\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{5}{x^4}}.$$

Послѣ вторичнаго возвышенія въ квадратъ, получаемъ:

$$\frac{1}{x^4} + \frac{4}{ax^3} + \frac{4}{a^2x^2} = \frac{1}{a^2x^2} + \frac{5}{x^4}.$$

Откуда: $3x^2 + 4ax - 4a^2 = 0.$

Слѣдов., $x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 12a^2}}{3} = \frac{-2a \pm 4a}{3},$

$$x_1 = \frac{2a}{3}, \quad x_2 = -2a.$$

Подстановкою убѣждаемся, что рѣшеніе x_1 удовлетворяетъ данному уравненію, а рѣшеніе x_2 для него постороннее.

Случай 2, когда уравненіе содержитъ нѣсколько квадратныхъ радикаловъ. Напримеръ, пусть уравненіе, приведенное къ дѣлому виду, содержитъ три радикала: \sqrt{a} , \sqrt{b} и \sqrt{c} , гдѣ a , b и c , обозначаютъ какія-либо алгебраическія выраженія, содержащія неизвѣстныя. Желая освободить уравненіе отъ \sqrt{a} , выпишемъ этотъ радикалъ за скобки изъ всѣхъ членовъ, гдѣ онъ встрѣчается, затѣмъ уединимъ его и возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ; этимъ освободимъ уравненіе отъ \sqrt{a} и не введемъ никакихъ новыхъ радикаловъ. Подобно этому освобождаемъ уравненіе отъ \sqrt{b} и затѣмъ отъ \sqrt{c} .

Примѣръ. $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x-x^2} + \sqrt{1+x} = 0.$

Такъ какъ $x+x^2 = x(1+x)$, $1-x^2 = (1+x)(1-x)$, $x-x^2 = x(1-x)$, то, положивъ для краткости: $1+x = a$, $x = b$, $1-x = c$, получимъ уравненіе такого вида:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} + \sqrt{a} = 0.$$

Выпишемъ \sqrt{a} за скобки и уединяемъ его:

$$\sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c} + 1) = -\sqrt{bc}.$$

Возвышеніе въ квадратъ даетъ:

$$a(b+c+1+2\sqrt{bc}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}) = bc.$$

Выносимъ \sqrt{b} за скобки и уединяемъ его:

$$2a\sqrt{b}(1+\sqrt{c})=bc-ab-ac-a-2a\sqrt{c}=A-2a\sqrt{c},$$

гдѣ

$$A=bc-ab-ac-a.$$

Возвышеніе въ квадратъ даетъ:

$$4a^2b(1+c+2\sqrt{c})=A^2-4aA\sqrt{c}+4a^2c.$$

Выносимъ за скобки \sqrt{c} и уединяемъ его:

$$4a\sqrt{c}(2ab+A)=A^2+4a^2c-4a^2b-4a^2bc.$$

Возвысивъ въ квадратъ, окончателно находимъ:

$$16a^2c(2ab+A)^2=(A^2+4a^2c-4a^2b-4a^2bc)^2.$$

Подставивъ вмѣсто a, b и c ихъ выраженія, получимъ раціональное уравненіе съ неизвѣстнымъ x .

235. Освобожденіе уравненія отъ знаковъ радикала помощью неопредѣленныхъ коэффициентовъ. Укажемъ наиболѣе простой способъ приведенія уравненія къ раціональному виду. Пусть данное

уравненіе содержитъ $\sqrt[n]{q}$ (гдѣ q есть какое-нибудь выраженіе, заключающее неизвѣстныя), при чемъ этотъ радикалъ можетъ входить въ уравненіе въ различныхъ степеняхъ, т.-е. въ немъ могутъ встрѣчаться: $\sqrt[n]{q}, \sqrt[n]{q^2}=(\sqrt[n]{q})^2, \sqrt[n]{q^3}=(\sqrt[n]{q})^3$ и т. д. Обозначивъ для краткости $\sqrt[n]{q}$ черезъ r можемъ положить:

$$\sqrt[n]{q}=r, \sqrt[n]{q^2}=r^2, \sqrt[n]{q^3}=r^3 \dots$$

Предположивъ далѣе, что, замѣнивъ въ уравненіи различные степени $\sqrt[n]{q}$ соответственными степенями r , мы получимъ уравненіе вида раціональнаго и дѣлаго относительно r . Къ такому, виду, всегда можетъ быть приведено уравненіе. Въ самомъ дѣлѣ, если бы въ немъ были члены, дробные относительно $\sqrt[n]{q}$, мы могли бы предварительно освободить его отъ знаменателей; далѣе, если бы $\sqrt[n]{q}$ стоялъ подъ знакомъ другого радикала (т.-е. уравненіе содержало бы сложные радикалы), мы тогда обозначили бы черезъ r этотъ сложный радикалъ, съ дѣяно предварительно освободиться отъ него.

Если въ уравненіи встрѣтятся члены, содержащіе r съ показателемъ, болѣшимъ или равнымъ n , мы можемъ въ каждомъ изъ нихъ сдѣлать по-

казателя меньшим n , основываясь на равенствѣ: $r^n = q$. Такъ:

$$r^{n+1} = r^n r = q r, r^{n+2} = r^n r^2 = q r^2; \text{ и т. д.}$$

Понизивъ, такимъ образомъ, показатели при r вездѣ, гдѣ можно, мы приведемъ уравненіе къ виду:

$$ar^{n-1} + br^{n-2} + cr^{n-3} + \dots + kr + l = 0, \quad (1)$$

гдѣ коэффициенты a, b, c, \dots, k и l могутъ содержать другіе радикалы (цѣлоторые изъ этихъ коэффициентовъ могутъ равняться 0).

Чтобы освободить это уравненіе отъ всѣхъ степеней радикала r , умножимъ обѣ его части на многочленъ степени $n-1$:

$$r^{n-1} + Ar^{n-2} + Br^{n-3} + \dots + K, \quad (2)$$

въ которомъ всѣ $n-1$ коэффициентовъ оставимъ пока неопределенными M . После умноженія правая часть уравненія будетъ 0, а лѣвая обратится въ многочленъ:

$$ar^{2n-2} + (aA + b)r^{2n-3} + (aB + bA + c)r^{2n-4} + \dots + lK.$$

Понизимъ въ этомъ многочленѣ показатели при r во всѣхъ членахъ, гдѣ эти показатели больше или равны n , и соединимъ въ одинъ всѣ члены, содержаще одинаковыя степени r ; тогда получимъ уравненіе вида:

$$Mr^{n-2} + Nr^{n-3} + \dots + Rr + S = 0, \quad (3)$$

гдѣ M, N, \dots и S суть выраженія первой степени относительно неопределенныхъ коэффициентовъ A, B, C, \dots, K (какъ легко видѣть изъ рассмотрѣнія процесса полученія этихъ выраженій).

Составимъ теперь систему $n-1$ уравненій первой степени съ $n-1$ неизвѣстными A, B, C, \dots, K :

$$M=0, N=0, \dots, R=0 \quad (4)$$

Рѣшивъ эту систему и вставивъ найденныя значенія неопредѣленныхъ коэффициентовъ въ ур. (3), получимъ уравненіе, не содержащее $\sqrt[n]{q}$:
 $S=0.$

Полезно замѣтить, что это уравненіе обладаетъ вообще посторонними рѣшеніями, именно тѣми, которыя удовлетворяютъ уравненію:

$$r^{n-2} + Ar^{n-3} + Br^{n-4} + \dots + K = 0.$$

Если въ уравненіи встрѣчаются другіе радикалы, мы тѣмъ же приемомъ уничтожимъ послѣдовательно и ихъ.

Примѣръ.

$$\sqrt[4]{(2-x)^3} - \sqrt[4]{2-x} + 1 = 0.$$

Для краткости обозначимъ $2-x$ черезъ q ; тогда уравненіе будетъ:

$$\sqrt[4]{q^3} - \sqrt[4]{q} + 1 = 0. \text{ Если положимъ: } \sqrt[4]{q} = r, \text{ то уравненіе приметъ видъ:}$$

$$r^3 - r + 1 = 0.$$

Умножимъ обѣ части уравненія на многочленъ:

$$r^3 + Ar^2 + Br + C$$

съ 3-мя неопредѣленными коэффициентами A , B и C . Послѣ умноженія будемъ имѣть:

$$r^6 + Ar^5 + (B-1)r^4 + (C-A+1)r^3 + (A-B)r^2 + (B-C)r + C = 0,$$

т.-е. $qr^3 + Aqr + (B-1)q + (C-A+1)r^3 + \dots = 0;$

$$(C-A+1)r^3 + (A-B+q)r^2 + (B-C+4q)r + [C+(B-1)q] = 0.$$

Положимъ, что
$$\begin{cases} C-A+1=0 \\ A-B+q=0 \\ B-C+4q=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C=A-1 \\ B=A+q \\ A+q-A+1+4q=0 \end{cases}$$

Откуда находимъ:

$$A = -\frac{q+1}{q}; \quad B = \frac{q^2 - q - 1}{q}; \quad C = -\frac{2q+1}{q}$$

и
$$C + (B-1)q = -\frac{2q+1}{q} + \left(\frac{q^2 - q - 1}{q} - 1\right)q = \frac{q^3 - 2q^2 - 3q - 1}{q}.$$

Теперь уравненіе приводится къ виду:

$$q^3 - 2q^2 - 3q - 1 = 0.$$

Подставивъ на мѣсто q разность $2-x$ и произведя упрощенія, окончательно получимъ уравненіе:

$$x^3 - 4x^2 + x + 7 = 0.$$

Замѣчаніе. Можетъ случиться, что уравненія системы (4) окажутся несовмѣстными; въ этомъ случаѣ, значить, не существуетъ многочленъ (2) степени $(n-1)$ -й, способный обратить въ нули всѣ коэффициенты при r въ ур. ('). Тогда пробуемъ тѣмъ же приемомъ найти многочленъ степени $(n-2)$ -й, достигающій той же цѣли. Если и такого многочлена не окажется, будемъ искать многочленъ степени $(n-3)$ -й и т. д.

Примѣръ.

$$\sqrt[3]{q^3} - 2\sqrt[3]{q} + 4 = 0.$$

$$\sqrt[3]{q} = r; \quad \sqrt[3]{q^3} = r^3, \quad r^3 - 2r + 4 = 0.$$

$$\begin{aligned} (r^3 - 2r + 4)(r^3 + Ar + B) &= r^6 + (A-2)r^3 + (B-2A+4)r^2 + \\ &+ (4A-2B)r + 4B = qr + (A-2)q + (B-2A+4)r^2 + \dots \\ &= (B-2A+4)r^2 + (4A-2B+q)r + [4B+(A-2)q] = 0 \end{aligned}$$

Положивъ, что
$$\begin{cases} B-2A+4=0 \\ 4A-2B+q=0 \end{cases} \text{ т.-е. } \begin{cases} 2A-B=4 \\ 4A-2B=-q. \end{cases}$$

Уравнения этой системы оказываются несовместными. Посмотрим, нельзя ли найти многочлен 1-й степени: $r+A$, достигающий той же цели:

$$\begin{aligned} (r^2 - 2r + 4)(r + A) &= r^2 + (A - 2)r^2 + (4 - 2A)r + 4A = \\ &= q + (A - 2)r^2 + \dots = (A - 2)r^2 + (4 - 2A)r + 4A + q = 0. \end{aligned}$$

Оказывается, что при $A=2$ коэффициенты при r^2 и при r обращаются в нули, и уравнение принимает рациональный вид: $8+q=0$.

236. Приведение знаменателя дроби къ рациональному виду. Для этой цели может служить тот же прием, который въ предыдущем параграфѣ былъ нами указанъ для освобождения уравненія отъ знаковъ радикала. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что если для уничтоженія различныхъ степеней $\sqrt[n]{q}$ въ уравненіи $F=0$ достаточно умножить обѣ его части на приличнo выбранный многочлен F_1 , то для уничтоженія различныхъ степеней $\sqrt[n]{q}$ въ знаменателѣ F дроби достаточно умножить числителя и знаменателя на F_1 :

Пусть, напр., имѣемъ дробь:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2} + 1} = \frac{1}{r^2 - r + 1},$$

гдѣ $r = \sqrt[4]{2}$. Множитель, обращающій знаменателя этой дроби въ рациональное выраженіе, есть многочленъ $r^2 + Ar^2 + Br + C$, коэффициенты котораго мы уже опредѣлили въ примѣрѣ предыдущаго параграфа. Они равны (полагая $q=2$).

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{5}{2}.$$

Значитъ, $r^2 + Ar^2 + Br + C = \sqrt[4]{8} - \frac{3}{2}\sqrt[4]{2} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{2} - \frac{5}{2}.$

Послѣ умноженія въ знаменателѣ получимъ:

$$C + (B - 1)q = -\frac{5}{2} + \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot 2 = -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}.$$

Значитъ, дробь приметъ видъ:

$$\frac{-2\sqrt[4]{8} + 3\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2} + 5}{7}.$$

ГЛАВА VI

Уравненія высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ или къ уравненіямъ первой степени.

237. Биквадратное уравненіе. Такъ наз. уравненіе четвертой степени, содержащее неизвѣстное только въ четныхъ степеняхъ. Общій видъ его слѣдующій:

$$ax^4+bx^2+c=0. \quad (1)$$

Такое уравненіе легко приводится къ квадратному посредствомъ введенія вспомогательнаго неизвѣстнаго. Положимъ, что $x^2=y$; тогда $x^4=(x^2)^2=y^2$, и уравненіе приметъ видъ:

$$ay^2+by+c=0. \quad (2)$$

Уравненіе это имѣетъ два корня:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Подставивъ каждое изъ этихъ значеній въ уравненіе $x^2=y$, найдемъ, что биквадратное уравненіе имѣетъ слѣдующіе 4 корня:

$$\begin{aligned} x_1 &= + \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, & x_2 &= + \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \\ x_3 &= - \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, & x_4 &= - \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \end{aligned}$$

Если корни y_1 и y_2 вспомогательнаго квадратнаго уравненія (2) окажутся мнимыми (что будетъ при $b^2 - 4ac < 0$), то всѣ 4 корня биквадратнаго уравненія (1) будутъ также мнимы. Если y_1 и y_2 окажутся вещественные неравные (что будетъ при $b^2 - 4ac > 0$), то могутъ представиться слѣдующіе 3 случая: 1) одинъ изъ корней y_1 и y_2 положительный, другой отрицательный; въ этомъ случаѣ 2 корня биквадратнаго уравненія вещественные, а два

мнимые; 2) оба корня y_1 и y_2 положительны; тогда всё 4 корня биквадратнаго уравненія вещественны; 3) оба корня y_1 и y_2 отрицательны; тогда всё 4 корня биквадратнаго уравненія мнимы. Наконецъ, если корни y_1 и y_2 равны (что будетъ при $b^2 - 4ac = 0$), то 4 корня биквадратнаго уравненія дѣлаются парно равными:

$$x_1 = x_3 = +\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \quad x_2 = x_4 = -\sqrt{\frac{-b}{2a}}$$

и будутъ всё или вещественны, или всё мнимы.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

$$x^2 = y; \quad x^4 = y^2; \quad y^2 - 13y + 36 = 0;$$

$$y = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13 \pm 5}{2}.$$

$$y_1 = \frac{13+5}{2} = 9; \quad y_2 = \frac{13-5}{2} = 4;$$

$$x = \pm\sqrt{y}; \quad x_1 = +\sqrt{9} = 3; \quad x_2 = -\sqrt{9} = -3; \quad x_3 = +\sqrt{4} = 2; \\ x_4 = -\sqrt{4} = -2.$$

238. Преобразование сложнаго радикала $\sqrt{A + \sqrt{B}}$. Корни биквадратнаго уравненія, какъ мы видѣли, выражаются подъ видомъ сложнаго радикала $\sqrt{A + \sqrt{B}}$. Такой радикалъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ возможно представить въ видѣ суммы или разности двухъ простыхъ радикаловъ. Покажемъ, какъ и при какихъ условіяхъ это можно сдѣлать.

Пусть въ сложномъ радикалѣ $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ числа A и B будутъ сопряженными, при чемъ \sqrt{B} число вещественное несоизмѣримое (и, слѣд., B число положительное). Предположимъ, что возможно равенство:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

въ которомъ числа x и y положительныя соизмѣримыя. Возвысивъ обѣ части этого равенства въ квадратъ, получимъ:

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy} = x + y + \sqrt{4xy}.$$

Откуда:

$$\sqrt{4xy} = (A - x - y) + \sqrt{B}$$

и слѣд.

$$4xy = (A - x - y)^2 + B + 2(A - x - y)\sqrt{B}.$$

Лѣвая часть этого уравненія есть число соизмѣримо; значить, и правая часть должна быть числом соизмѣримо. Но это возможно только тогда, когда коэффициентъ при \sqrt{B} будетъ равенъ нулю. Положивъ

$$A - x - y = 0, \text{ находимъ: } x + y = A; \text{ тогда } 4xy = \sqrt{B},$$

или:

$$x + y = A, \quad xy = \frac{B}{4}.$$

Изъ этихъ равенствъ видно, что x и y можно рассматривать, какъ корни такого квадратнаго уравненія, у котораго коэффициентъ при неизвѣстномъ во 2-й степени есть 1, коэффициентъ при неизвѣстномъ въ 1-й степени есть $-A$, а свободный членъ равенъ $\frac{B}{4}$ (§ 219). Значить, рѣшивъ уравненіе:

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0,$$

найдемъ x и y .

$$x = z_1 = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{B}{4}} = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

$$y = z_2 = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{B}{4}} = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Отсюда видно, что x и y только тогда будутъ числа положительныя соизмѣрима, когда 1) A есть число положительное, 2) $A^2 - B$ есть точный квадратъ; значить, только при этихъ условіяхъ радикаль $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ можно представить въ видѣ суммы двухъ простыхъ радикаловъ:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \quad (1)$$

Подобнымъ же образомъ выведемъ, что при тѣхъ же условіяхъ:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \quad (2)$$

Примѣры:

$$1) \quad \sqrt{10 + \sqrt{51}} = \sqrt{\frac{10+7}{2}} + \sqrt{\frac{10-7}{2}} = \sqrt{\frac{34}{2}} + \sqrt{\frac{6}{2}};$$

$$2) \quad \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{8} - \sqrt{60} = \sqrt{\frac{8+2}{2}} - \sqrt{\frac{8-2}{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{3};$$

$$3) \quad \sqrt{\frac{9}{11} + \frac{4}{11}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9 + \sqrt{32}}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{\frac{9+7}{2}} + \sqrt{\frac{9-7}{2}}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{8} + 1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{88} + \sqrt{11}}{11}.$$

$$4) \quad a_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r} \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}} = \sqrt{2r^3 - \sqrt{4r^4 - a_n^2 r^2}}.$$

(Извѣстная геометрическая формула удвоенія числа сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника).

Здѣсь $A=2r^2$, $B=4r^2 - a_n^2 b^2$, $\sqrt{A^2 - B} = a_n r$; поэтому

$$a_{2n} = \sqrt{\frac{2r^2 + a_n r}{2}} - \sqrt{\frac{2r^2 - a_n r}{2}} = \sqrt{r \left(r + \frac{a_n}{2}\right)} - \sqrt{r \left(r - \frac{a_n}{2}\right)}.$$

Замѣчаніе. Равенства (1) и (2) остаются вѣрными и тогда, когда $A^2 - B$ не есть точный квадрат и даже тогда, когда A и B числа несоизмѣримы; но тогда эти равенства не представляютъ практическаго интереса.

239. Возвратное уравненіе 4-й степени. Возвратнымъ уравненіемъ вообще называется уравненіе, у котораго коэффициенты, равностоящие отъ начала и конца, одинаковы. Такимъ образомъ, возвратное уравненіе 4-й степени есть уравненіе вида:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Чтобы рѣшить такое уравненіе, раздѣлимъ обѣ его части на x^2 (мы имѣемъ право это сдѣлать, такъ какъ x не равно 0):

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

или

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b \left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Введемъ вспомогательное неизвѣстное y , опредѣляемое равенствомъ:

$$x + \frac{1}{x} = y; \text{ тогда } x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2 \text{ и, слѣд., } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2;$$

подставивъ эти выраженія въ уравненіе, получимъ:

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, найдемъ два значенія для y ; пусть это будутъ: $y_1 = \alpha$ и $y_2 = \beta$; тогда

$$x + \frac{1}{x} = \alpha \text{ и } x + \frac{1}{x} = \beta,$$

и слѣд.:

$$x^2 - \alpha x + 1 = 0 \text{ и } x^2 - \beta x + 1 = 0$$

Изъ этихъ двухъ уравненій найдемъ 4 рѣшенія даннаго уравненія

240. Болѣе общій случай уравненія 4-й степени. Подобнымъ же приемомъ можно рѣшить уравненіе 4-й степени:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

если коэффициенты a , b , d и e удовлетворяютъ пропорціи:

$$a : e = b^2 : d^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ этой пропорціи находимъ: $e = \frac{ad^2}{b^2}$; слѣд., уравненіе

принимаетъ видъ: $ax^3+bx^2+cx+\frac{ad^2}{b^2}=0$. Раздѣливъ всѣ его члены на x^3 , можемъ уравненіе представить такъ:

$$a\left(x^3+\frac{d^2}{b^2x^3}\right)+b\left(x+\frac{d}{bx}\right)+c=0.$$

Если положимъ, что $x+\frac{d}{bx}=y$, то $x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}=y^2-\frac{2d}{b}$, и уравненіе превращается въ квадратное:

$$a^2\left(y^2-\frac{2d}{b}\right)+by+c=0.$$

Найдя y , легко опредѣлимъ потомъ и x

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $2x^4-15x^3+40x^2-45x+18=0$. Замѣтимъ, что $2:18=(-15)^2:(-45)^2$, раздѣлимъ всѣ члены уравненія на x^3 и представимъ его въ видѣ:

$$2\left(x^3+\frac{9}{x^3}\right)-15\left[x+\frac{3}{x}\right]+40=0$$

Если положимъ, что $x+\frac{3}{x}=y$, то $x^2+\frac{9}{x^2}=y^2-6$, и уравненіе будетъ:

$$2(y^2-6)-15y+40=0 \text{ или } 2y^2-15y+28=0.$$

Откуда:

$$y_1=4 \text{ и } y_2=\frac{7}{2}.$$

Значенія x опредѣляются уравненіями:

$$x+\frac{3}{x}=4 \text{ и } x+\frac{3}{x}=\frac{7}{2},$$

изъ которыхъ находимъ: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=2$, $x_4=\frac{3}{2}$.

241. Уравненія, у которыхъ лѣвая часть разлагается на множителей, а правая есть 0. Такъ какъ произведеніе можетъ равняться 0 только тогда, когда, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ сомножителей равенъ 0, то рѣшеніе уравненія вида: $ABC\dots=0$ приводится къ рѣшенію уравненій болѣе низкихъ степеней: $A=0$, $B=0$, $C=0\dots$

Примѣры.

1) $ax^3+bx^2+cx=0$. Представимъ уравненіе въ видѣ:

$$x(ax^2+bx+c)=0,$$

замѣтимъ, что оно распадается на два уравненія:

$$x=0 \text{ и } ax^2+bx+c=0.$$

2) $ax^3+bx^2+bx+a=0$. Это возвратное уравнение 3-й степени можно представить такъ:

$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0.$$

$$\begin{aligned} \text{Но } x^3+1 &= x^3+x^2-x^2+1 = x^2(x+1)-(x+1)(x-1) = \\ &= (x+1)(x^2-x+1); \end{aligned}$$

поэтому уравнение можемъ написать такъ:

$$(x+1)[a(x^2-x+1)+bx]=0.$$

Слѣдов., оно распадается на два уравненія:

$$x+1=0 \text{ и } ax^2-(a-b)x+a=0.$$

Откуда легко получимъ три значенія для x .

242. Зная одинъ корень уравненія, можемъ понизить его степень на 1. Пусть имѣемъ уравненіе $ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\dots=0$ и положимъ, что одинъ корень его извѣстенъ, напр., $x=a$. Въ такомъ случаѣ лѣвая часть уравненія дѣлится на $x-a$ (§ 76, слѣдствіе 2-е). Раздѣливъ на самомъ дѣлѣ, получимъ въ частномъ нѣкоторый многочленъ Q степени $(m-1)$ й. Такъ какъ дѣльное равно дѣлителю, умноженному на частное, то предложенное уравненіе можно представить такъ: $(x-a)Q=0$. Теперь очевидно, что уравненіе распадается на два: $x-a=0$ и $Q=0$. Последнее уравненіе есть $(m-1)$ -й степени.

$$\text{Примѣръ: } x^3-15x^2+56x-60=0$$

Замѣтивъ, что уравненіе удовлетворяется при $x=10$, дѣлимъ его лѣвую часть на $x-10$; въ частномъ получаемъ x^2-5x+6 ; послѣ этого уравненіе представляемъ такъ:

$$\begin{aligned} \text{откуда:} \quad (x-10)(x^2-5x+6) &= 0, \\ x_1=10, x_2=2, x_3=3. \end{aligned}$$

243. Упрощеніе двучленного уравненія. Двучленнымъ уравненіемъ наз. уравненіе вида: $ax^m+b=0$, или, что то же самое, вида $x^m+\frac{b}{a}=0$ ¹⁾. Обозначивъ абсолютную величину дроби $\frac{b}{a}$ черезъ q , мы можемъ двучленное уравненіе

¹⁾ Когда двучленное уравненіе имѣетъ видъ $ax^m+bx^n=0$, гдѣ $m > n$, то его можно представить такъ: $x^n(ax^{m-n}+b)=0$ и, слѣд., оно распадается на два уравненія: $x=0$ и $ax^{m-n}+b=0$.

написать: или $x^m + q = 0$, или $x^m - q = 0$. При помощи вспомогательного неизвестного эти уравнения всегда можно упростить такъ, что свободный членъ у перваго обратится въ $+1$, а у втораго въ -1 . Дѣйствительно, положимъ, что $x = y \sqrt[m]{q}$, гдѣ $\sqrt[m]{q}$ есть арифметическій корень m -й степени изъ q ; тогда $x^m = qy^m$, и уравненія примутъ видъ:

$$\begin{aligned} & qy^m + q = 0, \quad \text{т.-е.} \quad q(y^m + 1) = 0; \quad \text{откуда:} \quad y^m + 1 = 0; \\ \text{или} \quad & qy^m - q = 0, \quad \text{т.-е.} \quad q(y^m - 1) = 0; \quad \text{откуда:} \quad y^m - 1 = 0. \end{aligned}$$

Итакъ, рѣшеніе двучленныхъ уравненій приводится къ рѣшенію уравненій вида $y^m \pm 1 = 0$. Рѣшеніе такихъ уравненій элементарными способами можетъ быть выполнено только при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ показателя m , напимѣрь, при $m = 3, 4, 5, 6, 8, 9$ и при нѣкоторыхъ другихъ. Общій приѣмъ, употребляемый при этомъ, состоитъ въ разложеніи лѣвой части уравненія на множители, послѣ чего уравненіе приводится къ виду $ABC... = 0$, разсмотрѣнному нами раньше.

244. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій третьей степени. Эти уравненія слѣдующія:

$$x^3 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^3 + 1 = 0.$$

Замѣтивъ, что

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= x^3 - x^2 + x^2 - 1 = x^2(x-1) + (x+1)(x-1) = (x-1)(x^2 + x + 1) \\ \text{и} \quad x^3 + 1 &= (x+1)(x^2 - x + 1), \end{aligned}$$

мы можемъ предложенныя уравненія написать такъ:

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \quad \text{и} \quad (x+1)(x^2 - x + 1) = 0.$$

Значитъ, первое изъ нихъ имѣетъ корни, удовлетворяющіе уравненіямъ:

$$x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + x + 1 = 0,$$

а второе—корни, удовлетворяющіе уравненіямъ:

$$x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - x + 1 = 0.$$

Рѣшивъ ихъ, находимъ, что уравненіе $x^3 - 1 = 0$ имѣетъ слѣ-

дующие три корня:

$$x_1=1, \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad x_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

изъ которыхъ одинъ вещественный, а два мнимыхъ; уравненіе $x^3+1=0$ имѣеть три корня:

$$x_1=-1, \quad x_2=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad x_3=\frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

изъ которыхъ также одинъ вещественный, а два мнимыхъ.

245. Другіе примѣры двучленныхъ уравненій, разрѣшимыхъ элементарно. 1) $x^2-1=0$, это уравненіе можно написать такъ:

$$(x^2-1)(x^2+1)=0.$$

Слѣд., оно распадается на два: $x^2-1=0$ и $x^2+1=0$, отсюда находимъ: $x=\pm 1$ и $x=\pm\sqrt{-1}$.

2) $x^4+1=0$, уравненіе можно написать такъ:

$$(x^2+1)^2-2x^2=0 \text{ или } (x^2+1-x\sqrt{2})(x^2+1+x\sqrt{2})=0.$$

Слѣд., оно распадается на 2 уравненія второй степени

3) $x^5-1=0$; уравненіе можно написать такъ:

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0.$$

Слѣд., оно распадается на два уравненія, изъ которыхъ послѣднее есть возвратное уравненіе 4-й степени, рѣшаемое элементарно

4) $x^6+1=0$, уравненіе можно написать такъ:

$$(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x+1)=0$$

Слѣд., оно распадается на два уравненія, изъ которыхъ послѣднее есть возвратное 4-й степени

Подобнымъ же образомъ рѣшаются уравненія

$$x^4\pm 1=0, \quad x^6\pm 1=0, \quad x^8\pm 1=0$$

и некоторыя другія

246. Различныя значенія корня. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій m -й степени имѣеть тѣсную связь съ нахожденіемъ всѣхъ значеній корня той же степени изъ даннаго числа. Въ самомъ дѣлѣ, если черезъ x обозначимъ какое угодно значеніе $\sqrt[m]{A}$, то, согласно опредѣленію корня, мы будемъ имѣть: $x^m=A$ и, слѣдов., $x^m-A=0$; такимъ образомъ, каждое рѣшеніе этого двучленнаго уравненія пред-

ставляет собою m -й корень изъ числа A ; слѣд., сколько двучленное уравненіе имѣетъ различныхъ рѣшеній, столько $\sqrt[m]{A}$ имѣетъ различныхъ значеній.

Основываясь на этомъ замѣчаніи, докажемъ, что корень кубичный изъ всякаго числа имѣетъ три различныхъ значенія. Найти всѣ значенія $\sqrt[3]{A}$ значить, другими словами, рѣшить уравненіе $x^3 - A = 0$. Обозначивъ арифметическое значеніе $\sqrt[3]{A}$ черезъ q (оно можетъ быть только одно, § 163, III), введемъ вспомогательное неизвѣстное y , связанное съ x такимъ равенствомъ: $x = qy$. Тогда уравненіе $x^3 - A = 0$ представится такъ: $q^3 y^3 - A = 0$; но $q^3 = A$; поэтому $q^3 y^3 - A = A(y^3 - 1)$; слѣдов., уравненіе окончательно приметъ видъ: $y^3 - 1 = 0$. Мы видѣли, что это уравненіе имѣетъ три корня:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad y_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Каждое изъ этихъ значеній, удовлетворяя уравненію $y^3 = 1$, представляетъ собою кубичный корень изъ 1. Такъ какъ $x = qy$, то

$$x_1 = q \cdot 1, \quad x_2 = q \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad x_3 = q \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Это и будутъ три значенія $\sqrt[3]{A}$; одно изъ нихъ вещественное, а два мнимыя. Всѣ они получаются, если арифметическое значеніе кубичнаго корня изъ A умножимъ на каждое изъ трехъ значеній кубичнаго корня изъ 1. Напримѣръ, кубичный корень изъ 8, арифметическое значеніе котораго есть 2, имѣетъ слѣдующія три значенія:

$$2; \quad 2 \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = -1 + \sqrt{-3}; \quad 2 \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = -1 - \sqrt{-3}.$$

Замѣчаніе. Въ высшей алгебрѣ доказывается, что двучленное уравненіе $x^m - A = 0$ имѣетъ m различныхъ корней; вследствие этого $\sqrt[m]{A}$ имѣетъ m различныхъ значеній, при чемъ, если m число четное и A отри-

цательное, то всё эти значения мнимы; если n четное и A положительное, то два значения вещественны (изъ нихъ одно положительное, другое отрицательное, съ одинаковой абсолютной величиной); наконецъ, если n нечетное число, то изъ всѣхъ значений $\sqrt[n]{A}$ только одно вещественное.

247. Трехчленное уравнение. Такъ наз. уравнение вида: $ax^{2n}+bx^n+c=0$, т.-е. уравнение, содержащее 3 члена: одинъ свободный (c), другой съ неизвѣстнымъ въ нѣкоторой степени n и третій съ неизвѣстнымъ въ степени, которой показатель есть $2n$. Рѣшеніе такого уравненія посредствомъ введенія вспомогательнаго неизвѣстнаго приводится къ рѣшенію квадратнаго и двучленнаго уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ, что $x^n=y$, то тогда $x^{2n}=(x^n)^2=y^2$ и уравненіе приметъ видъ:

$$ay^2+by+c=0;$$

откуда:
$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

и, слѣдов., $x^n = y_1$ и $x^n = y_2$.

Рѣшивъ эти двучленные уравненія, найдемъ всё значенія x .

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

$$x^3 = y; \quad y^2 - 9y + 8 = 0; \quad y = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 8} = \frac{9 \pm 7}{2};$$

$$y_1 = 8; \quad y_2 = 1; \quad \text{слѣдов., } x^3 = 8 \text{ и } x^3 = 1.$$

Рѣшивъ эти двучленные уравненія, получимъ слѣдующія 6 значеній для x :

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -1 + \sqrt{-3}; \quad x_3 = -1 - \sqrt{-3};$$

$$x_4 = 1; \quad x_5 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}; \quad x_6 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

248. Уравненія, сходныя съ трехчленными. Подобно трехчленнымъ, рѣшаются также уравненія вида:

$$aQ^2 + bQ + c = 0 \text{ и } aQ^4 + bQ^2 + c = 0,$$

если Q есть такое выраженіе, содержащее x , которое будучи приравнено какому-нибудь данному числу, составитъ уравненіе, разрѣшимое элементарно. Въ самомъ дѣлѣ, замѣнивъ въ данныхъ уравненіяхъ Q на y , полу-

чимъ квадратное или биквадратное уравненіе относительно y . Найди всѣ значенія y и подставивъ каждое изъ нихъ въ ур. $Q=y$, найдемъ изъ этого уравненія всѣ значенія x

Примѣръ. $(x^2 - 5x + 11)^2 - 12(x^2 - 5x + 11) + 35 = 0$.

Положивъ $x^2 - 5x + 11 = y$, получимъ: $y^2 - 12y + 35 = 0$,

откуда: $y_1 = 7, y_2 = 6$,

слѣд., $x^2 - 5x + 11 = 7$ и $x^2 - 5x + 11 = 6$.

Рѣшивъ эти уравненія, находимъ: $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 2$.

249. Введеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Иногда уравненіе удается рѣшить, посредствомъ введенія двухъ или болѣе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ; въ такомъ случаѣ данное уравненіе приводится къ системѣ уравненій съ вспомогательными неизвѣстными.

Примѣръ. $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$.

Положимъ, что $x+a=y, x+b=z$; тогда рѣшеніе даннаго уравненія сводится къ рѣшенію такой системы:

$$y^4 + z^4 = c, y - z = a - b$$

Чтобы рѣшить эту систему, возмемъ второе уравненіе въ 4-ю степень и вычтемъ изъ него первое; тогда получимъ:

или
$$-4y^2z + (y^2z^2 - 4yz^3) = (a-b)^4 - c$$

т.е.
$$2yz(2y^2 - 3yz + 2z^2) = c - (a-b)^4,$$

$$2yz[2(y-z)^2 + yz] = c - (a-b)^4.$$

Но $y - z = a - b$; подставивъ, найдемъ:

$$2yz[2(a-b)^2 + yz] = c - (a-b)^4.$$

Изъ этого уравненія опредѣлимъ yz ; зная yz и $y - z$, легко затѣмъ найдемъ y и z

Г Л А В А VII.

Нѣкоторыя замѣчанія объ алгебраическихъ уравненіяхъ.

250. Общій видъ всякаго алгебраическаго уравненія. Мы видѣли (§ 114) что уравненіе, содержащее неизвѣстную въ знаменателяхъ, можетъ быть приведено къ цѣлому виду. Далѣе мы знаемъ (§§ 234, 235), что уравненіе, содержащее неизвѣстную подъ знакомъ радикала, можетъ быть приведено къ рациональному виду. Вслѣдствіе этого можемъ сказать, что всякое уравненіе, въ которомъ неизвѣстное связано

съ данными числами посредством конечнаго числа 6-ти алгебраическихъ дѣйствій (сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня¹⁾), можетъ быть приведено къ такому цѣлому и рациональному виду:

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + kx + l = 0,$$

гдѣ коэффициенты уравненія a, b, c, \dots, k и l суть постоянныя вещественныя или комплексныя числа, а m есть показатель степени уравненія. Нѣкоторые коэффициенты въ частныхъ случаяхъ могутъ равняться 0.

Уравненіе такого вида наз. алгебраическимъ. Алгебраическія уравненія степеня выше 2-й наз. уравненіями высшихъ степеней.

251. Нѣкоторыя свойства алгебраическаго уравненія. Уравненія высшихъ степеней составляютъ предметъ высшей алгеоры, элементарная же рассматриваетъ только нѣкоторые частные случаи этихъ уравненій.

Высшая алгебра устанавливаетъ слѣдующую важную истину объ уравненіяхъ: всякое алгебраическое уравненіе съ вещественными коэффициентами имѣетъ вещественный или комплексный корень (Теорема Гаусса²⁾ (1790). Допустивъ эту истину (доказательство которой въ элементарной алгебрѣ было бы затруднительно), не трудно показать, что алгебраическое уравненіе имѣетъ столько корней, вещественныхъ или комплексныхъ, сколько единицъ въ показателѣ его степени. Дѣйствительно, пусть имѣемъ уравненіе:

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + kx + l = 0. \quad (1)$$

Согласно теоремѣ Гаусса это уравненіе должно имѣть вещественный или комплексный корень; пусть этотъ корень будетъ α . Тогда многочленъ стоящій въ лѣвой части уравненія (1), долженъ дѣлиться на $x - \alpha$ (§ 76, слѣд. 2 с). Если сдѣлаемъ дѣленіе, то въ частномъ получимъ многочленъ степени $m - 1$, у котораго первый коэффициентъ будетъ a . Обозначивъ другіе его коэффициенты соответственно буквами: b_1, c_1, \dots, k_1 и, принявъ во вниманіе, что дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, можемъ представить уравненіе (1) такъ:

$$(x - \alpha)(ax^{m-1} + b_1x^{m-2} + c_1x^{m-3} + \dots + k_1) = 0. \quad (2)$$

Приравнявъ 0 многочленъ, стоящій во вторыхъ скобкахъ, получимъ новое уравненіе, которое, по той же теоремѣ должно имѣть нѣкоторый корень β ; вслѣдствіе этого лѣвая его часть можетъ быть разложена на два

¹⁾ Въ предположеніи, что при возвышеніи въ степень и при извлеченіи корня неизвѣстное не входитъ ни въ показателя степени, ни въ показателя корня

²⁾ Карлъ-Фридрихъ Гауссъ — знаменитый нѣмецкій математикъ (1777 — 1855).

множители: $x - \beta$ и многочлен степени $m - 2$, у котораго первый коэффициент сопряженно будет α . Поэтому уравнение (1) можно переписать так:

$$(x - \alpha)(x - \beta)(ax^{m-2} + b_1x^{m-3} + \dots) = 0. \quad (3)$$

Продолжая эти разужения далѣе добьемся, наконецъ, до того, что многочленъ, заключенный въ послѣднихъ скобкахъ, будетъ 2-й степени, при чемъ первый его коэффициентъ останется α . Разложивъ этотъ трехчленъ на множители (§ 220), приведемъ уравнѣе (1) окончательно къ виду:

$$a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots (x - \lambda) = 0, \quad (4)$$

гдѣ всѣхъ разностей: $x - \alpha$, $x - \beta$... будетъ m . Очевидно, что ур. (4) обращается въ тождество при каждомъ изъ значений: $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$... $x = \lambda$ и не удовлетворяется никакими иными значеніями x , значить, уравненіе (1) имѣетъ m корней α , β , γ ... λ . Въ частныхъ случаяхъ нѣкоторые и даже все корни могутъ оказаться одинаковыми.

Полезно замѣтить еще слѣдующія истины, доказываемыя въ высшей алгебрѣ.

Сумма корней всякаго алгебраическаго уравненія $ax^m + bx^{m-1} + \dots + kx + l = 0$ равна $-\frac{b}{a}$, а произведеніе корней равно $\frac{l}{a}$ (примѣромъ можетъ служить квадратное уравненіе).

Если алгебраическое уравненіе съ вещественными коэффициентами имѣетъ комплексныя корни, то число этихъ корней четное (примѣромъ можетъ служить биквадратное уравненіе).

Если алгебраическое уравненіе съ вещественными коэффициентами имѣетъ n корней вида $p + qi$, то оно имѣетъ n корней вида $p - qi$ (примѣромъ можетъ служить биквадратное уравненіе, комплексныя корни котораго всегда сопряжены), и такъ какъ:

$$\begin{aligned} [x - (p + qi)][x - (p - qi)] &= [(x - p) - qi][(x - p) + qi] = \\ &= (x - p)^2 - q^2i^2 = (x - p)^2 + q^2 = x^2 - px + (p^2 + q^2), \end{aligned}$$

то лѣвая часть уравненія содержитъ въ этомъ случаѣ n вещественныхъ множителей вида $ax^2 + bx + c$.

Алгебраическое уравненіе нечетной степени съ вещественными коэффициентами имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень.

Уравненія съ произвольными буквенными коэффициентами степени 3-й и 4-й разрешены алгебраически, т.е. для корней этихъ уравненій найдены общія формулы, составленныя изъ коэффициентовъ уравненія посредствомъ алгебраическихъ дѣйствій.

Въ этомъ смыслѣ уравненія съ произвольными буквенными коэффициентами степени выше 4-й не могутъ быть разрешены алгебраически (теорема Абеля¹⁾; однако, когда коэффициенты уравненія какой угодно степени выражены числами, всегда есть возможность вычислить съ желаемой степенью приближенія все его корни, какъ вещественныя, такъ и мнимыя. Указаніе способовъ такого вычисленія составляетъ важную часть предмета высшей алгебры.

¹⁾ Норвежскій математикъ начала XIX столѣтія (1802—1829).

ГЛАВА VIII.

Система уравнений второй степени.

252. Нормальный видъ уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными. Полное уравненіе второй степени съ 2 неизвѣстными x и y , послѣ раскрытія въ немъ скобокъ, освобожденія отъ знаменателей и отъ радикаловъ и приведенія подобныхъ членовъ, можетъ содержать въ себѣ только члены слѣдующихъ 6 видовъ:

члены 2-й степени:		члены 1-й степени:
содержащіе x^2		содержащіе x
> y^2		> y
> xy		

и членъ, не содержащій неизвѣстнаго (членъ нулевой степени).

Перенеся всѣ члены уравненія въ одну его лѣвую часть, мы приведемъ уравненіе къ такому нормальному виду:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

гдѣ коэффициенты a, b, c, d, e, f суть данныя алгебраическія числа, положительныя или отрицательныя; нѣкоторыя изъ нихъ могутъ равняться 0.

Одно уравненіе съ двумя неизвѣстными допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, т.е. принадлежитъ къ числу неопредѣленныхъ (см. § 118).

253. Система двухъ уравненій, изъ которыхъ одно первой, а другое второй степени. Общій видъ такой системы слѣдующій:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ mx + ny = p. \end{cases}$$

Чтобы рѣшить эту систему, опредѣлимъ изъ того уравненія, которое первой степени, какое-нибудь одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого, напр., y въ зависимости отъ x , и вставимъ полученное выраженіе въ уравненіе второй степени;

тогда вмѣсто данной системы получимъ такую равносильную систему:

$$y = \frac{p - mx}{n},$$

$$ax^2 + bx \cdot \frac{p - mx}{n} + c \left(\frac{p - mx}{n} \right)^2 + dx + e \cdot \frac{p - mx}{n} + f = 0.$$

Въ этой системѣ второе уравненіе есть квадратное съ однимъ неизвѣстнымъ x . Рѣшивъ его, найдемъ для x два значенія: x_I и x_{II} , соответственно которымъ изъ перваго уравненія получимъ два значенія для другого неизвѣстнаго: y_I и y_{II} . Такимъ образомъ, предложенная система имѣетъ двѣ пары рѣшеній (x_I, y_I) и (x_{II}, y_{II}) .

Примѣръ. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 + x + 3y = 1 \dots \text{ур. 2-й степ.} \\ 2x - y = 1 \dots \dots \dots \text{ур. 1-й степ.} \end{cases}$

Изъ втораго уравненія находимъ: $y = 2x - 1$. Подставляемъ это выраженіе вмѣсто y въ первое уравненіе:

$$x^2 - 4(2x - 1)^2 + x + 3(2x - 1) = 1.$$

Рѣшаемъ это уравненіе:

$$\begin{aligned} x^2 - 4(4x^2 - 4x + 1) + x + 6x - 3 - 1 &= 0 \\ x^2 - 16x^2 + 16x - 4 + x + 6x - 3 - 1 &= 0 \\ -15x^2 + 23x - 8 &= 0; \quad 15x^2 - 23x + 8 = 0. \end{aligned}$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8}}{2 \cdot 15} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 480}}{30} = \frac{23 \pm \sqrt{49}}{30}$$

$$x_I = \frac{23 + 7}{30} = 1 \quad x_{II} = \frac{23 - 7}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}.$$

Послѣ этого изъ уравненія $y = 2x - 1$ находимъ:

$$y_I = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \quad y_{II} = 2 \cdot \frac{8}{15} - 1 = \frac{1}{15}.$$

Такимъ образомъ, данная система уравненій имѣетъ двѣ

пары рѣшеній:

$$1) \begin{cases} x_I=1 \\ y_I=1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_{II}=\frac{8}{15} \\ y_{II}=\frac{1}{15} \end{cases}$$

254. Искусственные приемы. Указанный приемъ примѣнимъ всегда, коль скоро одно уравненіе первой степени; но въ нѣкоторыхъ случаяхъ удобнѣе пользоваться искусственными приемами, для которыхъ нельзя указать общаго правила. Приведемъ нѣкоторые примѣры.

Примѣръ 1. $x+y=a$; $xy=b$.

Первый способъ. Такъ какъ предложенныя уравненія даютъ сумму и произведеніе неизвѣстныхъ, то (§ 219) x и y можно разсматривать, какъ корни такого квадратнаго уравненія:

$$z^2 - az + b = 0,$$

изъ котораго находимъ:

$$x_I = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}; \quad x_{II} = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Одинъ изъ этихъ корней надо принять за x , другой за y .

Второй способъ. Возвысимъ первое уравненіе въ квадратъ и вычтемъ изъ него учетверенное второе ¹⁾:

$$\begin{array}{r} x^2 + 2xy + y^2 = a^2 \\ -4xy = -4b \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b \end{array}$$

т. е. $(x-y)^2 = a^2 - 4b$; откуда: $x-y = \pm \sqrt{a^2 - 4b}$.

Теперь имѣемъ систему:

$$\begin{cases} x+y=a & \text{Сложивъ и вычтя эти уравненія} \\ x-y = \pm \sqrt{a^2 - 4b} & \text{получимъ:} \end{cases}$$

$$2x = a \pm \sqrt{a^2 - 4b}; \quad 2y = a \mp \sqrt{a^2 - 4b}.$$

¹⁾ Подобныя фразы употребляются часто, ради краткости, вмѣсто „возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ“, „умножимъ обѣ части уравненія на 4“, и т. п.

Откуда:
$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad y = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

замѣтимъ, что здѣсь знаки \pm и \mp находятся въ соотвѣтствіи другъ съ другомъ, т.-е. верхнему знаку въ формулѣ для x соответствуетъ верхній знакъ въ формулѣ для y и нижнему знаку въ первой формулѣ соответствуетъ нижній знакъ второй формулы.

Такимъ образомъ, данная система имѣетъ двѣ пары рѣшеній:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ y_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{II} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ y_{II} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{array} \right.$$

Вторая пара отличается отъ первой только тѣмъ, что значеніе x первой пары служитъ значеніемъ y второй пары, и наоборотъ. Это можно было бы предвидѣть *a priori* (заранѣе), такъ какъ данныя уравненія таковы, что они не замѣняются отъ замѣны x на y , а y на x . Замѣтимъ, что такія уравненія называются симметричными.

Примѣръ 2. $x - y = a, \quad xy = b.$

Первый способъ. Представимъ уравненія въ видѣ:

$$x + (-y) = a, \quad x(-y) = -b,$$

замѣчаемъ, что x и $-y$ суть корни такого квадратнаго уравненія:

$$z^2 - az - b = 0,$$

слѣд.: $x = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}; \quad y = -z_{II} = -\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)$

(или $x = z_{II}, \quad y = -z_1$).

Второй способъ. Возвысимъ первое уравненіе въ квадратъ и сложимъ его съ учетвереннымъ вторымъ:

$$(x+y)^2 = a^2 + 4b; \quad \text{откуда: } x+y = \pm \sqrt{a^2 + 4b}.$$

Теперь имѣемъ систему:

$$\begin{cases} x+y=\pm\sqrt{a^2+4b}. \\ x-y=a. \end{cases}$$

Сложивъ и вычтя эти уравненія, найдемъ:

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}, \quad y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2},$$

гдѣ знаки \pm въ обѣихъ формулахъ находятся въ соотвѣтствіи.

Примѣръ 3. $x+y=a, \quad x^2+y^2=b.$

Возвысивъ первое уравненіе въ квадратъ и вычтя изъ него второе, получимъ:

$$2xy=a^2-b, \quad \text{откуда: } xy=\frac{a^2-b}{2}.$$

Теперь вопросъ приводится къ рѣшенію системы:

$$x+y=a, \quad xy=\frac{a^2-b}{2},$$

которую мы уже рассмотрѣли въ примѣрѣ первомъ.

255. Система двухъ уравненій, изъ которыхъ каждое второй степени. Такая система въ общемъ видѣ не разрѣшается элементарно, такъ какъ она приводится къ полному уравненію 4-й степени.

Въ самомъ дѣлѣ, въ общемъ видѣ эта система представляется такъ:

$$\begin{cases} ax^2+bx+cy^2+dx+ey+f=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0. \end{cases}$$

Чтобы исключить одно неизвѣстное, достаточно было бы изъ какого-либо уравненія опредѣлить одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого и вставить полученное выраженіе во второе уравненіе; но тогда пришлось бы освобождать уравненіе отъ знаковъ радикала. Можно поступить проще; умножимъ первое уравненіе на c , а второе на c' , и вычтемъ почленно одно изъ другого; тогда исключится y^2 , и уравненіе приметъ видъ:

$$\begin{aligned} \text{или} \quad & mx^2+nx+px+qy+r=0. \\ & mx^2+(mx+q)y+px+r=0 \end{aligned}$$

Откуда:
$$y = -\frac{mx^2 + px + r}{nx + g}.$$

Вставивъ это значеніе въ одно изъ данныхъ уравненій и освободивъ полученное уравненіе отъ знаменателей, будемъ имѣть въ окончательномъ результатѣ полное уравненіе 4-й степени, которое въ общемъ видѣ элементарными способами не рѣшается.

Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи, которые можно рѣшить элементарнымъ путемъ.

Примѣръ 1. $x^2 + y^2 = a, \quad xy = b.$

Первый способъ (способъ подстановки). Изъ второго уравненія опредѣлимъ одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого, напр., $x = \frac{b}{y}$. Вставимъ это значеніе въ первое уравненіе и освободимся отъ знаменателя; тогда получимъ биквадратное уравненіе $y^4 - ay^2 + b^2 = 0$. Рѣшивъ его, найдемъ для y четыре значенія. Вставивъ каждое изъ нихъ въ формулу, выведенную ранѣе для x , найдемъ четыре соотвѣтствующія значенія для x .

Второй способъ. Сложивъ первое уравненіе съ удвоеннымъ вторымъ, получимъ:

$$x^2 + y^2 + 2xy = a + 2b, \quad \text{т.-е.} \quad (x+y)^2 = a + 2b.$$

Откуда:
$$x+y = \pm\sqrt{a+2b}. \quad (1)$$

Вычтя изъ перваго уравненія удвоенное второе, найдемъ:

$$x^2 + y^2 - 2xy = a - 2b, \quad \text{т.-е.} \quad (x-y)^2 = a - 2b.$$

Откуда:
$$x-y = \pm\sqrt{a-2b}, \quad (2)$$

Не трудно видѣть, что знаки \pm въ уравненіяхъ (1) и (2) не находятся въ соотвѣтствіи другъ съ другомъ, и потому вопросъ приводится къ рѣшенію слѣдующихъ 4 системъ первой степени:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x+y = \sqrt{a+2b} \\ x-y = \sqrt{a-2b} \end{cases} & 2) \begin{cases} x+y = \sqrt{a+2b} \\ x-y = -\sqrt{a-2b} \end{cases} \\ 3) \begin{cases} x+y = -\sqrt{a+2b} \\ x-y = \sqrt{a-2b} \end{cases} & 4) \begin{cases} x+y = -\sqrt{a+2b} \\ x-y = -\sqrt{a-2b} \end{cases} \end{array}$$

Каждая из них рѣшается весьма просто посредством сложения и вычитанія уравненій.

Третій способъ. Возвысивъ второе уравненіе въ квадратъ, получимъ слѣдующую систему:

$$x^2 + y^2 = a, \quad x^2 y^2 = b^2.$$

Отсюда видно, что x^2 и y^2 суть корни такого квадратнаго уравненія:

$$z^2 - az + b^2 = 0.$$

$$\text{Слѣд.: } x^2 = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}, \quad y^2 = z_{11} = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

$$\text{и } x = \pm \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}}, \quad y^2 = \pm \sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}},$$

гдѣ знаки \pm въ обѣихъ формулахъ не находятся въ соответствіи.

Примѣръ 2. $x^2 - y^2 = a, \quad xy = b.$

Способомъ подстановки легко приведемъ эту систему къ биквадратному уравненію. Вотъ еще искусственное рѣшеніе.

Возвысивъ второе уравненіе въ квадратъ, будемъ имѣть систему:

$$x^2 - y^2 = a, \quad x^2 y^2 = b^2$$

$$\text{или } x^2 + (-y^2) = a, \quad x^2 (-y^2) = -b^2.$$

Отсюда видно, что x^2 и $-y^2$ суть корни такого уравненія:

$$z^2 - az - b^2 = 0.$$

Изъ него находимъ:

$$z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}, \quad z_{11} = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$

Одинъ изъ этихъ корней надо принять за x^2 , другой за $-y^2$; послѣ этого найдемъ x и y .

$$\text{Примѣръ 3. } \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0. \end{cases}$$

Раздѣливъ второе уравненіе на y^2 , получимъ:

$$a' \left(\frac{x}{y} \right)^2 + b' \left(\frac{x}{y} \right) + c' = 0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе относительно $\frac{x}{y}$, найдемъ два значенія: $\frac{x}{y} = m$ и $\frac{x}{y} = n$; откуда $x = my$ и $x = ny$. Подставимъ въ первое данное уравненіе на мѣсто x эти значенія; тогда получимъ квадратное уравненіе относительно y .

256. Система трехъ и болѣе уравненій второй степени, а также системы уравненій высшихъ степеней могутъ быть рѣшены элементарными способами только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ посредствомъ искусственныхъ приемовъ. Приведемъ нѣкоторые примѣры.

Примѣръ 1.

$$\begin{cases} x(x+y+z) = a \\ y(x+y+z) = b \\ z(x+y+z) = c \end{cases} \quad \text{Сложивъ всѣ три уравненія, получимъ:} \\ (x+y+z)^2 = a+b+c.$$

Откуда: $x+y+z = \pm \sqrt{a+b+c}.$

Послѣ этого изъ данныхъ уравненій находимъ:

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{a+b+c}}, \quad y = \pm \frac{b}{\sqrt{a+b+c}}, \quad z = \pm \frac{c}{\sqrt{a+b+c}}$$

(знаки \pm находятся въ соотвѣтствіи).

Примѣръ 2.

$$yz = a, \quad xz = b, \quad xy = c.$$

Перемноживъ всѣ уравненія почленно, получимъ: $x^2y^2z^2 = abc$, т.-е. $(xyz)^2 = abc$, откуда: $xyz = \pm \sqrt{abc}$. Раздѣливъ это уравненіе почленно на данныя, найдемъ:

$$x = \pm \frac{\sqrt{abc}}{a}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{abc}}{b}, \quad z = \pm \frac{\sqrt{abc}}{c}$$

(знаки \pm находятся въ соотвѣтствіи).

ОТДѢЛЪ VI.

Неравенства и неопредѣленные уравненія.

ГЛАВА I.

Неравенства.

(Повторить § 28).

257. Неравенства и ихъ подраздѣленія. Два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знаками $>$ или $<$, составляютъ неравенство; эти алгебраическія выраженія наз. частями неравенства: лѣвая часть и правая часть.

Подобно равенствамъ, неравенства, содержащія буквы, бываютъ двоякаго рода: 1) неравенства тождественныя, вѣрныя при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ нихъ, и 2) неравенства, соответствующія уравненіямъ, вѣрныя только при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ (эти буквы наз. тогда неизвѣстными и неравенства; онѣ, обыкновенно, берутся изъ послѣднихъ буквъ алфавита). Напримѣръ, неравенство

$$(1+a)^2 > 1+2a$$

вѣрно при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквы a , отличныхъ отъ нуля, такъ какъ его лѣвая часть, равная всегда $1+2a+a^2$, превосходитъ правую часть на число a^2 , которое всегда поло-

жительно (кроме случая $a=0$); неравенство же

$$3x+2 < x+10$$

вѣрно не при всякихъ численныхъ значеніяхъ x , а только при такихъ, которыя меньше 4.

Неравенства второго рода, подобно уравненіямъ, раздѣляются по числу неизвѣстныхъ и по степенямъ ихъ.

О двухъ неравенствахъ говорятъ, что они одинаковаго смысла, если одновременно въ обоихъ лѣвыя части или больше, или меньше правыхъ; въ противномъ случаѣ говорятъ, что неравенства противоположнаго смысла.

258. Два рода вопросовъ относительно неравенствъ. Относительно неравенствъ (какъ и равенствъ), содержащихъ буквы, могутъ быть предлагаемы вопросы двоякаго рода:

1) доказать тождественное неравенство, т.-е. обнаружить вѣрность его при всевозможныхъ значеніяхъ буквъ, или, по крайней мѣрѣ, при значеніяхъ, ограниченныхъ заданными напередъ условіями;

2) рѣшить неравенство, содержащее неизвѣстныя, т.-е. опредѣлить, между какими предѣлами должны заключаться численныя значенія неизвѣстныхъ, чтобы оно было вѣрно, т.-е. больше чего или меньше чего должны быть эти значенія неизвѣстныхъ.

Рѣшеніе вопросовъ того и другого рода основывается на нѣкоторыхъ свойствахъ неравенствъ, подобнымъ тѣмъ, которыя служатъ основаніемъ для рѣшенія уравненій.

259. Главнѣйшія свойства неравенствъ. Обозначая каждую часть неравенства одной буквой, мы можемъ главнѣйшія свойства неравенствъ выразить такъ:

1°. Если $a > b$, то $b < a$.

Дѣйствительно, если $a > b$, то это значить (§ 28), что разность $a-b$ число положительное; но въ такомъ случаѣ разность $b-a$ должна быть числомъ отрицательнымъ и потому $b < a$.

2°. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Дѣйствительно, если $a > b$, то разность $a - b$ число положительное; если $b \geq c$, то разность $b - c$ или равна 0, или есть число положительное. Но тогда сумма этихъ двухъ разностей: $(a - b) + (b - c)$ должна быть числомъ положительнымъ. Сумма эта равна: $a - b + b - c = a - c$; если же разность $a - c$ число положительное, то $a > c$.

3°. Если $a > b$ и $a_1 \geq b_1$, то $a + a_1 > b + b_1$.

Дѣйствительно, при этихъ условіяхъ разность $a - b$ число положительное, а разность $a_1 - b_1$ или равна 0, или есть число положительное; но тогда сумма $(a - b) + (a_1 - b_1)$, равная разности $(a + a_1) - (b + b_1)$, должна быть числомъ положительнымъ; а это значить, что $a + a_1 > b + b_1$.

Это свойство, благодаря тому, что второе изъ данныхъ неравенствъ ($a_1 \geq b_1$) соединено съ равенствомъ, распадается на 2 отдѣльныя свойства, которыя можно высказать такъ:

неравенства одинаковаго смысла можно почленно складывать;

если къ обѣимъ частямъ неравенства придадимъ поровну, то знакъ неравенства не измѣнится;

4°. Если $a > b$ и $a_1 < b_1$, то $a_1 - a > b - b_1$.

Дѣйствительно, если $a > b$, то разность $a - b$ число положительное; съ другой стороны, если $a_1 < b_1$, то, значить, $b_1 \geq a_1$, и потому разность $b_1 - a_1$ или равна 0, или есть число положительное; но тогда сумма этихъ разностей: $(a - b) + (b_1 - a_1)$, равная $(a - a_1) - (b - b_1)$, должна быть числомъ положительнымъ; а это значить, что $a - a_1 > b - b_1$.

Это свойство такъ же, какъ и предыдущее, благодаря двойному знаку $<$ во второмъ неравенствѣ, распадается на 2 отдѣльныя свойства, которыя можно высказать такъ:

изъ одного неравенства можно почленно вычесть другое неравенство противоположнаго смысла, оставивъ знакъ перваго неравенства;

если отъ обѣихъ частей неравенства от-

пимемъ поровну, то знакъ неравенства не измѣнится;

5°. Если $a > b$ и m положительное число, то $am > bm$ и $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

Дѣйствительно, если $a > b$, то разность $a - b$ число положительное, и потому произведенія этой разности на положительныя числа m и $\frac{1}{m}$ также положительныя числа; по эти

произведенія равны соотвѣтственно разностямъ $am - bm$ и $\frac{a}{m} - \frac{b}{m}$;

слѣд., $am > bm$ и $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

Свойство это можно высказать такъ: если обѣ части неравенства умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же положительное число, то знакъ неравенства не измѣнится.

6°. Если $a > b$ и m отрицательное число, то $am < bm$ и $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.

Въ самомъ дѣлѣ, при данныхъ условіяхъ произведенія $(a - b)m$ и $(\frac{a}{m} - \frac{b}{m})m$, какъ произведенія положительнаго числа на отрицательное, должны быть числами отрицательными; по произведенія

эти равны соотвѣтственно $am - bm$ и $\frac{a}{m} - \frac{b}{m}$; значить, $am < bm$

и $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.

Свойство это можно высказать такъ: если обѣ части неравенства умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же отрицательное число, то знакъ неравенства измѣнится на обратный.

Въ частности знакъ неравенства измѣняется на обратный при умноженіи частей неравенства на -1 , т. е. при перемѣнѣ знаковъ передъ членами неравенства на противоположные; такъ

$$\begin{array}{l} 7 > 2 \quad | \quad 7 > -10 \quad | \quad -2 > -5 \\ -7 < -2 \quad | \quad -7 < +10 \quad | \quad +2 < +5. \end{array}$$

О неравенствахъ, у которыхъ части—числа положительныя, можно высказать еще слѣдующія, почти очевидныя, истины:

1°. Если $a > b$, и $c > d$, то $ac > bd$;

2°. Если $a > b$, то $a^2 > b^2$, $a^3 > b^3$, и т. д.

3°. Если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$, и т. д. (здѣсь знакомъ радикала обозначено арифметическое значеніе корня).

4°. Если $a > b$, и $c < d$, то $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

260. Равносильныя неравенства. Неравенства, содержащія одни и тѣ же неизвѣстныя, наз. **равносильными**, если они удовлетворяются одними и тѣми же значеніями этихъ неизвѣстныхъ; такъ, 2 неравенства: $3x + 2 < x + 10$ и $3x < x + 8$ равносильны, такъ какъ оба они удовлетворяются значеніями x , меньшими 4, и только этими значеніями.

Относительно равносильности неравенствъ докажемъ теоремы, весьма сходныя съ подобными же теоремами относительно равносильности уравненій (§§ 108, 110).

261 Теорема 1. Если къ обѣимъ частямъ неравенства (содержащаго неизвѣстныя) прибавимъ или отъ нихъ отнимемъ одно и то же число, то получимъ новое неравенство, равносильное первому.

Обозначимъ для краткости лѣвую часть неравенства, содержащаго неизвѣстныя, одною буквою A и правую часть—другою буквою B , и пусть m есть какое угодно число; докажемъ, что два неравенства:

$$A > B \quad (1) \quad \text{и} \quad A + m > B + m \quad (2)$$

равносильны.

Положимъ, что первое неравенство удовлетворяется при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ. Это значить, что при этихъ значеніяхъ численная величина A дѣлается больше численной величины B ; но тогда при тѣхъ же значеніяхъ буквъ и численная величина суммы $A + m$ сдѣлается больше численной величины суммы $B + m$, такъ какъ если къ обѣимъ частямъ

неравенства придадимъ поровну, то знакъ неравенства не измѣнится. Значитъ, всякое рѣшеніе неравенства (1) принадлежитъ и неравенству (2).

Обратно, если при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ численная величина суммы $A+m$ дѣлается больше численной величины суммы $B+m$, то для тѣхъ же значеній буквъ и численная величина A сдѣлается больше численной величины B (если отъ обѣихъ частей неравенства отнимемъ поровну, то...); слѣд., всѣ рѣшенія неравенства (2) удовлетворяютъ и неравенству (1); значитъ, эти неравенства равносильны.

Переходя отъ неравенства (2) къ неравенству (1), мы замѣчаемъ, что отъ обѣихъ частей неравенства можно отнять одно и то же число.

Замѣчаніе Прибавляемое къ обѣимъ частямъ неравенства одно и то же число можетъ быть дано въ видѣ какого-нибудь буквеннаго выраженія, при чемъ выраженіе это можетъ содержать въ себѣ и неизвѣстныя, входящія въ неравенство; нужно только, чтобы прибавляемое-выраженіе при всѣхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ данному неравенству, представляло собою опредѣленное число (а не принимало бы,

напр., вида $\frac{0}{0}$ или ∞).

Слѣдствіе. Любой членъ неравенства можно перенести изъ одной части въ другую съ противоположнымъ знакомъ.

Если, напр., имѣемъ неравенство:

$$A > B + C,$$

то, отнявъ отъ обѣихъ частей по C , получимъ: $A - C > B$.

262. Теорема 2. Если обѣ части неравенства (содержащаго неизвѣстныя) умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же положительное число, то получимъ новое неравенство, равносильное первому.

Докажемъ, что два неравенства:

$$A > B \quad (1) \quad \text{и} \quad Am > Bm \quad (2)$$

равносильны, если только m положительное число.

Пусть при нѣкоторыхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ численная величина A дѣлается больше численной величины B ; тогда при тѣхъ же значеніяхъ неизвѣстныхъ и численная величина произведенія Am дѣлается больше численной величины произведенія Bm , такъ какъ отъ умноженія обѣихъ частей неравенства на положительное число, какъ мы знаемъ, знакъ неравенства не измѣняется. Значитъ, всѣ рѣшенія неравенства (1) удовлетворяютъ и неравенству (2).

Обратно, если при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ численная величина Am дѣлается больше численной величины Bm , то при тѣхъ же значеніяхъ буквъ и численная величина A дѣлается больше численной величины B , такъ какъ отъ дѣленія обѣихъ частей неравенства на положительное число знакъ неравенства не измѣняется.

Замѣчаніе. Одно и то же положительное число, на которое, по доказанному, мы имѣемъ право умножить или разделить обѣ части неравенства (не измѣняя его знака), можетъ быть дано въ видѣ буквеннаго выраженія, при чемъ это выраженіе можетъ содержать въ себѣ и неизвѣстныя, входящія въ неравенство. По при этомъ надо особо рассмотреть, при всѣхъ ли значеніяхъ буквъ, входящихъ въ выраженіе, на которое мы умножаемъ или дѣлимъ обѣ части неравенства, это выраженіе остается положительнымъ числомъ.

Напр., умножимъ обѣ части неравенства $A > B$ на выраженіе $(x-5)^2$.

$$A > B \quad (1) \quad A(x-5)^2 > B(x-5)^2 \quad (2)$$

Множитель $(x-5)^2$ остается положительнымъ числомъ при всѣхъ значеніяхъ x , кромѣ одного: $x=5$. Значитъ неравенства (1) и (2) вполне равносильны въ томъ только случаѣ, если первое изъ нихъ не удовлетворяется значеніемъ $x=5$; въ противномъ же случаѣ, неравенство (1), удовлетворяясь всѣми рѣшеніями неравенства (2), имѣетъ еще свое особое рѣшеніе: $x=5$ (это рѣшеніе, конечно, неравенству (2) не удовлетворяетъ).

Слѣдствіе. Если обѣ части неравенства содержатъ положительнаго общаго множителя, то на него можно сократить,

неравенство. Напримѣръ, въ обѣихъ частяхъ неравенства:

$$(x-5)^2(x-1) > (x-5)^2(3-x)$$

есть общій множитель $(x-5)^2$. Этотъ множитель при $x=5$ обращается въ 0, а при всѣхъ остальныхъ значеніяхъ x онъ есть число положительное. Рѣшеніе $x=5$ не удовлетворитъ данному неравенству. Желая рѣшить, удовлетворяется ли оно при другихъ значеніяхъ x , мы можемъ сократить обѣ части неравенства на $(x-5)^2$, какъ на число положительное; послѣ сокращенія получимъ неравенство:

$$x-1 > 3-x.$$

Всѣ значенія x , удовлетворяющія этому неравенству, за исключеніемъ $x=5$, удовлетворяютъ и данному неравенству.

263. Теорема 3. Если обѣ части неравенства (содержащаго неизвѣстныя) умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же отрицательное число и при этомъ перемѣнимъ знакъ неравенства на противоположный, то получимъ новое неравенство, равносильное первому.

Эта теорема доказывается совершенно такъ же, какъ и теорема 2-я; надо только принять во вниманіе, что отъ умноженія или отъ дѣленія обѣихъ частей неравенства на отрицательное число знакъ неравенства измѣняется на противоположный.

По поводу этой теоремы можно высказать **замѣчаніе**, вполне аналогичное тому, которое было сдѣлано выше по отношенію къ теоремѣ 2-ой.

Слѣдствія. 1°. Перемѣнивъ у всѣхъ членовъ неравенства знаки на противоположные (т. е. умноживъ обѣ его части на -1), мы должны помѣнить знакъ неравенства на противоположный.

2°. Нельзя умножать обѣ части неравенства на буквеннаго множителя, знакъ котораго неизвѣстенъ.

3°. Неравенство съ дробными членами можно привести къ цѣлому виду. Возьмемъ, напр., такое неравенство:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D} \quad (1)$$

Перепишем всё члены въ лѣвую часть и приведемъ ихъ къ общему знаменателю:

$$\frac{AD-BC}{BD} > 0. \quad (2)$$

Если BD положительное число, то мы можемъ его отбросить, не измѣняя знака неравенства, потому что отбросить BD все равно, что умножить на это число обѣ части неравенства. Отбросивъ BD , получимъ неравенство, не содержащее дробей:

$$AD-BC > 0.$$

Если BD отрицательное число, то мы можемъ его отбросить, перемѣнивъ при этомъ знакъ неравенства на противоположный; тогда снова будемъ имѣть неравенство съ цѣлыми членами:

$$AD-BC < 0.$$

Но если знакъ BD неизвѣстенъ (что бываетъ вообще тогда, когда B и D содержатъ неизвѣстныя), то мы не можемъ умножать обѣ части неравенства на BD . Тогда рассуждаемъ такъ: чтобы дробь была положительна, необходимо и достаточно, чтобы у нея числитель и знаменатель были одновременно или положительны, или отрицательны. Слѣд., неравенство (2) удовлетворится при такихъ значеніяхъ буквъ, при которыхъ

$$\left\{ \begin{array}{l} AD-BC > 0 \\ BD > 0 \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} AD-BC < 0 \\ BD < 0. \end{array} \right.$$

Такимъ образомъ, рѣшеніе неравенства (1) сводится къ рѣшенію системы двухъ неравенствъ, не содержащихъ знаменателей.

264. Доказательство неравенства. Нельзя установить какихъ-либо общихъ правилъ для обнаруженія вѣрности предложеннаго неравенства. Замѣтимъ только, что одинъ изъ приемовъ состоитъ въ томъ, что предложенное неравенство преобразовываютъ въ другое, очевидное, и затѣмъ, исходя изъ этого очевиднаго неравенства, путемъ логическихъ рассужденій доходятъ до предложеннаго. Приведемъ нѣкоторые примѣры.

1. Доказать, что среднее арифметическое двухъ неравныхъ положительныхъ чиселъ больше ихъ средняго геометрическаго, т.-е. что $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, если a и b какія-нибудь положительныя числа, неравныя другъ другу.

Предположимъ, что данное неравенство вѣрно. Въ такомъ случаѣ будутъ вѣрны и слѣдующія неравенства:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > (\sqrt{ab})^2; \frac{a^2+2ab+b^2}{4} > ab; a^2+2ab+b^2 > 4ab; \\ a^2-2ab+b^2 > 0; (a-b)^2 > 0.$$

Очевидно, что послѣднее неравенство вѣрно для всякихъ неравныхъ значений буквъ a и b , какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ. Изъ этого однако нельзя еще сразу заключить, что и данное неравенство вѣрно для всякихъ неравныхъ значений буквъ; надо еще убѣдиться, что изъ послѣдняго неравенства $(a-b)^2 > 0$ можно получить, какъ слѣдствіе, всѣ предпущія. Просматривая эти неравенства отъ послѣдняго къ первому, видимъ, что всѣ онѣ равносильны другъ другу, если добавить ограниченіе, что буквы a и b должны теперь означать только положительныя числа, такъ какъ если одна изъ этихъ буквъ отрицательное число, то \sqrt{ab} будетъ мнимое число, а если обѣ буквы отрицательныя числа, то $\frac{a+b}{2}$ будетъ отрицательное число, а \sqrt{ab} число положительное, но отрицательное число не можетъ быть больше положительнаго ¹⁾.

II. Доказать, что величина дроби:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\dots+b_n}$$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_n , и b_1, b_2, b_n —положительныя числа, заключается между большею и меньшею изъ дроби:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}.$$

Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ будетъ дробь, которая не больше никакой изъ остальныхъ дроби, и $\frac{a_n}{b_n}$ — дробь, которая не меньше никакой изъ остальныхъ дро-

¹⁾ Полезно замѣтить, что предложенное неравенство становится нагляднымъ, если придадимъ ему геометрическій смыслъ. На произвольной прямой отложимъ отрезокъ AB , содержащій a линейныхъ единицъ, и въ томъ же направленіи—отрезокъ BC , содержащій b такихъ же линейныхъ единицъ. На отрезкѣ AC , равномъ $a+b$, построимъ, какъ на диаметръ, полуокружность и изъ B возставимъ къ AC перпендикуляръ BD до пересѣченія съ полуокружностью. Тогда, какъ известно изъ геометріи, BD есть средняя геометрическая между AB и BC т.-е. $BD = \sqrt{ab}$; средняя арифметическая AB и BC равна, очевидно, радіусу. Такъ какъ хорда меньше діаметра, то BD меньше радіуса, если только BD не совпадетъ съ радіусомъ, т.-е. если $a \neq b$.

бѣй. Положимъ, что $\frac{a_1}{b_1} = q_1$ и $\frac{a_n}{b_n} = q_n$. Тогда, согласно предположенію:

$$\frac{a_1}{b_1} = q_1, \quad \frac{a_2}{b_2} \geq q_1, \quad \frac{a_3}{b_3} \geq q_1 \dots \frac{a_n}{b_n} \geq q_1$$

$$\frac{a_n}{b_n} = q_n, \quad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leq q_n \dots \frac{a_2}{b_2} \leq q_n, \quad \frac{a_1}{b_1} \leq q_n$$

Отсюда:

$$a_1 = b_1 q_1, \quad a_2 \geq b_2 q_1, \quad a_3 \geq b_3 q_1 \dots a_n \geq b_n q_1$$

$$\text{и} \quad a_n = b_n q_n, \quad a_{n-1} \leq b_{n-1} q_n \dots a_2 \leq b_2 q_n, \quad a_1 \leq b_1 q_n.$$

Сложивъ почленно всѣ неравенства 1-й строки между собою и всѣ неравенства 2-й строки между собою, получимъ:

$$a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n \geq (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n) q_1$$

$$\text{и} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n) q_n.$$

Откуда, раздѣливъ обѣ части неравенствъ на положительное число $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, окончателно найдемъ:

$$q_1 \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} \geq q_n.$$

что и требовалось доказать.

265. Рѣшеніе одного неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Общій видъ неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, послѣ упрощенія его, есть слѣдующій:

$$ax > b \text{ или } ax < b.$$

Если $a > 0$, то, раздѣливъ на a обѣ части неравенствъ, получимъ такія равносильныя неравенства:

$$x > \frac{b}{a} \text{ или } x < \frac{b}{a}.$$

Если же $a < 0$, то равносильныя неравенства будутъ (при дѣленіи на отрицательное число знакъ неравенства измѣняется на противоположный):

$$x < \frac{b}{a} \text{ или } x > \frac{b}{a}.$$

Такимъ образомъ одно неравенство первой степени даетъ для

неизвѣстнаго одинъ предѣлъ¹⁾, ограничивающій значеніе неизвѣстнаго или сверху (верхній предѣлъ, когда $x < m$), или снизу (нижній предѣлъ, когда $x > m$). Поэтому вопросы, рѣшеніе которыхъ приводится къ рѣшенію одного неравенства первой степени, принадлежатъ къ вопросамъ неопредѣленнымъ.

Примѣръ. Рѣшить неравенство

$$2x(2x-5)-27 < (2x+1)^2.$$

Раскрываемъ скобки: $4x^2-10x-27 < 4x^2+4x+1.$

Переносимъ члены и дѣлаемъ приведеніе: $-14x < 28.$

Дѣлимъ обѣ части на -14 : $x > -2.$

266. Два неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Иногда случается, что вопросъ приводится къ рѣшенію двухъ неравенствъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ x . Рѣшивъ эти неравенства, мы получимъ изъ cadaго по одному предѣлу для неизвѣстнаго. При этомъ надо различать слѣдующіе 3 случая:

1) Предѣлы одинаковаго смысла (т.-е. оба верхніе, или оба нижніе); тогда достаточно взять одинъ изъ нихъ. Если, напр., $x > 7$ и $x > 12$, то достаточно взять только $x > 12$, потому что если $x > 12$, то, и подавно, $x > 7$; или если, напримѣръ, $x < 5$ и $x < 8$, то достаточно положить, что $x < 5$, потому что тогда, и подавно, $x < 8$.

2) Предѣлы противоположнаго смысла (т.-е. одинъ верхній, другой нижній) и не противорѣчатъ другъ другу; напр., $x > 10$ и $x < 15$. Въ этомъ случаѣ для неизвѣстнаго можно брать только такія значенія, которыя заключены между найденными предѣлами.

3) Предѣлы противорѣчатъ другъ другу;

¹⁾ Зѣсь слово «предѣлъ» не имѣетъ того значенія, которое придается ему, когда говорятъ о «предѣлѣ» переменнаго числа; здѣсь, какъ и въ вѣскогорныхъ другихъ случаяхъ (напр. въ значеніи «предѣлъ погрѣшности») слово «предѣлъ» означаетъ число, больше котораго или меньше котораго рассматриваемая величина не можетъ быть.

напримѣръ, $x < 5$ и $x > 7$. Въ этомъ случаѣ неравенства, взятые совместно, невозможны,

Примѣръ. Найти число, $\frac{3}{10}$ котораго, сложенные съ 5, меньше половины искомаго числа, а 5 разъ взятое число меньше суммы 60 съ удвоеннымъ искомымъ числомъ.

Обозначивъ искомое число черезъ x , получимъ согласно условіямъ задачи:

$$\frac{3}{10}x + 5 < \frac{1}{2}x \text{ и } 5x < 60 + 2x.$$

Откуда: $x > 25$ и $x < 20$.

Слѣд., задача невозможна.

267. Рѣшеніе неравенства второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Общій видъ такого неравенства, по упрощеніи его, есть слѣдующій:

$$ax^2 + bx + c \leq 0.$$

Такъ какъ знакъ $<$ всегда можетъ быть приведенъ къ знаку $>$ (умноженіемъ обѣихъ частей неравенства на -1), то достаточно рассмотреть неравенство вида:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

въ которомъ число a можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ.

Рѣшеніе этого неравенства основано на свойствѣ трехчлена $ax^2 + bx + c$ разлагаться на множители первой степени относительно x (§ 221). Обозначивъ черезъ α и β корни этого трехчлена, мы можемъ замѣнить его произведеніемъ $a(x - \alpha)(x - \beta)$, и тогда неравенство можно написать такъ:

$$a(x - \alpha)(x - \beta) > 0.$$

Рассмотримъ отдѣльно три слѣдующіе случая:

I. Корни α и β вещественныя и равныя (что бываетъ тогда, когда $b^2 - 4ac > 0$) (§223). Пусть $\alpha > \beta$. Если $a > 0$, то произведеніе $a(x - \alpha)(x - \beta)$, очевидно, тогда положительно, когда каждая изъ разностей: $x - \alpha$ и $x - \beta$ положительна или каждая отрицательна. Для этого достаточно, чтобы x было больше α (тогда подавно x больше β), или же чтобы x было меньше β (тогда подавно x меньше α). Слѣд., въ этомъ случаѣ неравенство получаетъ рѣшеніе:

$$\text{при } x > \alpha \text{ и также } x < \beta,$$

т.-е. x должно быть или больше большего корня или меньше меньшего корня.

Если же $a < 0$, то произведение $a'(x-a)(x-\beta)$ тогда положительно, когда одна из разностей: $x-a$ и $x-\beta$ отрицательна, а другая положительна. Для этого достаточно, чтобы x удовлетворяло неравенствам:

$$\beta < x < a,$$

т.-е. чтобы величина x заключалась между корнями трехчлена.

II. Корни α и β вещественные равные (что бывает тогда, когда $b^2-4ac=0$). Если $\alpha=\beta$, то неравенство принимает вид:

$$a(x-\alpha)^2 > 0.$$

Так как при всякомъ вещественномъ значеніи x , не равномъ α , число $(x-\alpha)^2$ положительно, то при $a > 0$ неравенство удовлетворяется всевозможными вещественными значеніями x , за исключеніемъ $x=\alpha$, а при $a < 0$ это неравенство невозможно.

III. Корни α и β мнимые (что бывает тогда, когда $b^2-4ac < 0$).

Пусть $\alpha = m + \sqrt{-n}$; въ такомъ случаѣ $\beta = m - \sqrt{-n}$.

$$\text{Тогда} \quad x-\alpha = x - (m + \sqrt{-n}) = (x-m) - \sqrt{-n}$$

$$\text{и} \quad x-\beta = x - (m - \sqrt{-n}) = (x-m) + \sqrt{-n}$$

$$\text{Слѣд.,} \quad a(x-\alpha)(x-\beta) = a[(x-m)^2 - (\sqrt{-n})^2] = a[(x-m)^2 + n],$$

и неравенство можно написать такъ:

$$a[(x-m)^2 + n] > 0.$$

Такъ какъ сумма $(x-m)^2 + n$, при всякомъ вещественномъ значеніи x есть число положительное, то при $a > 0$ неравенство удовлетворяется всевозможными значеніями x а при $a < 0$ оно невозможно.

Примѣры. 1) Рѣшить неравенство: $x^2+3x-23 > 0$. Корни трехчлена: $\alpha=4$, $\beta=-7$. Слѣд., неравенство можно написать:

$$(x-4)[x-(-7)] > 0.$$

Отсюда видно, что $x > 4$ или $x < -7$.

2) Рѣшить неравенство: $4x^2-28x+49 > 0$. Корни суть: $\alpha=\beta=3\frac{1}{2}$.

Поэтому $4(x-3\frac{1}{2})^2 > 0$.

Откуда видно, что неравенство невозможно.

3) Рѣшить неравенство: $x^2-4x+7 > 0$. Корни суть: $\alpha=2+\sqrt{-3}$, $\beta=2-\sqrt{-3}$; поэтому неравенство можно написать такъ:

$$(x-2)^2+3 > 0.$$

Отсюда видно, что оно удовлетворяется всевозможными вещественными значеніями x .

ГЛАВА II.

Неопредѣленное уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными.

Задачи. 1) Сколько нужно взять монеть въ 2 коп. и въ 3 коп., чтобы составляла сумма въ 25 коп.?

Впросъ приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣлпаго уравненія $2x+3y=25$.

2) Въ обществѣ, состоящемъ изъ мужчинъ и женщинъ, былъ сдѣланъ въ складчину сборъ, при чемъ каждый мужчина платилъ по 5 рублей, а каждая женщина по 2 руб. Сколько было въ этомъ обществѣ мужчинъ и сколько женщинъ, если сборъ составилъ 100 руб.?

Впросъ приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненія $5x+2y=100$.

268. Предварительное замѣчаніе. Какъ было прежде разъяснено (§ 118), одно уравненіе съ двумя неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество рѣшеній и потому называется *н е о п р е д ѣ л е н ы м ѣ*. Но бывають вопросы, когда требуется найти не какія бы то ни было рѣшенія неопредѣленнаго уравненія, а только *ц ѣ л ы я*, и притомъ *п о л о ж и т е л ь н ы я*; при этомъ условіи можетъ случиться, что одно уравненіе съ двумя неизвѣстными окажется опредѣленнымъ (а иногда и невозможнымъ). Разсмотримъ сначала, какъ можно находить *ц ѣ л ы я* рѣшенія, все равно, будутъ ли онѣ положительныя или отрицательныя, а потомъ укажемъ способъ отдѣлять изъ этихъ цѣлыхъ рѣшеній только положительныя и нулевыя.

269. Когда неопредѣленное уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній. Всякое уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными, послѣ надлежащихъ преобразованій, можетъ быть приведено къ виду $ax+by=c$, гдѣ a , b и c суть данныя цѣлыя числа, положительныя или отрицательныя. Мы предположимъ, что эти числа не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, кромѣ 1, потому что въ противномъ случаѣ мы могли бы сократить на него уравненіе. Если при этомъ окажется, что коэффициенты a и b имѣютъ

какого-нибудь общего дѣлителя, кромѣ 1, то уравненіе не можетъ имѣть цѣлыхъ рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, если допустимъ, что a и b имѣютъ общаго дѣлителя $m > 1$, а c на него не дѣлится, то, при цѣлыхъ значеніяхъ x и y , лѣвая часть уравненія представляетъ цѣлое число, дѣлящееся на m , а правая часть есть цѣлое число, не дѣлящееся на m ; значитъ, уравненіе невозможно при цѣлыхъ значеніяхъ x и y .

Напр., уравненіе $6x - 21y = 19$ не удовлетворяется никакими цѣлыми числами, такъ какъ при цѣлыхъ значеніяхъ x и y разность $6x - 21y$ дѣлится на 3, тогда какъ 19 не дѣлится на 3.

Итакъ разсмотримъ рѣшеніе уравненія $ax + by = c$ въ предположеніи, что числа a и b взаимно простыя.

270. Частный случай, когда какой-нибудь изъ коэффициентовъ a и b равенъ 1. Пусть напр., $b = 1$, т. е. уравненіе имѣетъ такой видъ:

$$ax + y = c; \text{ откуда: } y = c - ax.$$

Изъ послѣдняго равенства видимъ, что, подставляя вмѣсто x какія угодно цѣлыя числа (положительныя или отрицательныя), мы будемъ получать и для y цѣлыя числа. Число этихъ рѣшеній, очевидно, безконечно; всѣ онѣ заключены въ равенствѣ: $y = c - ax$, которое поэтому можно разсматривать, какъ рѣшеніе предложеннаго уравненія.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе: $x - 5y = 17$.

$$\text{Рѣшеніе: } x = 5y + 17.$$

Подставляя вмѣсто y произвольныя цѣлыя числа: 0, 1, 2, 3, ..., -1, -2, -3..., получимъ для x соответствующія значенія, выставленныя въ слѣдующей таблицѣ:

$y =$	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$x =$	17	22	27	32	37	12	7	2	-3

271. Частный случай, когда $c=0$. Чтобы решить уравнение: $ax+by=0$, в котором a и b какия-нибудь цѣлыя числа взаимно простые, опредѣлимъ какое-нибудь одно неизвестное въ зависимости отъ другого неизвестнаго; напр.:

$$x = -\frac{by}{a}.$$

Изъ этого равенства видно: чтобы x было цѣлое число, необходимо и достаточно, чтобы произведение by дѣлилось на a . Но b и a суть числа взаимно простые; поэтому для дѣлимости by на a необходимо ¹⁾ и достаточно, чтобы y дѣлилось на a , т.-е., чтобы частное $\frac{y}{a}$ было цѣлое число (какое угодно). Приравнявъ это частное произвольному цѣлому числу t , получимъ:

$$\frac{y}{a} = t, \quad y = at \quad \text{и} \quad x = -\frac{bat}{a} = -bt.$$

Такъ какъ t означаетъ произвольное цѣлое число, какъ положительное, такъ и отрицательное, то мы можемъ замѣнить t на $-t$; тогда получимъ для неизвестныхъ другія формулы:

$$y = -at; \quad x = bt.$$

Такимъ образомъ, уравнение $ax+by=0$ имѣеть рѣшенія, выражаемыя формулами:

$$\begin{cases} x = -bt \\ y = at \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = bt \\ y = -at. \end{cases}$$

Формулы эти можно высказать такъ: каждое неизвестное уравненія $ax+by=0$ равно одному и тому же произвольному цѣлому числу, умноженному на коэффициентъ при другомъ неизвестномъ, при чемъ какой-нибудь одинъ изъ этихъ коэффициентовъ долженъ быть взятъ съ обратнымъ знакомъ.

Примѣры. 1) $17x+5y=0$; $x=-5t$, $y=17t$; или $x=5t$, $y=-17t$.

2) $9x-13y=0$; $x=13t$, $y=9t$; или $x=-13t$; $y=-9t$.

¹⁾ Эта необходимость доказывается въ арифметикѣ; см. напр., А. Киселевъ «Систематическій курсъ арифметики», §120.

272. Общий случай. Когда ни один из коэффициентов a и b не равен 1, и свободный член c не равен 0, данное уравнение, посредством некоторых преобразований, приводить къ другому уравненію, у котораго коэффициенты меньше сравнительно съ первымъ; это уравненіе, въ свою очередь, приводить къ третьему, у котораго коэффициенты еще меньше, и т. д., пока не получатъ уравненія, у котораго коэффициентъ при какомъ-нибудь неизвестномъ равенъ 1. Такое уравненіе, какъ мы видѣли, рѣшается непосредственно.

Чтобы свести уравненіе $ax+by=c$ [1] къ другому, у котораго коэффициенты меньше, употребимъ послѣдовательно такіе три приема:

1°. Опредѣлимъ изъ уравненія то неизвестное, у котораго коэффициентъ меньше; пусть, напр. $b < a$; тогда опредѣлимъ y :

$$y = \frac{c-ax}{b}.$$

2°. Исключимъ изъ полученной дроби цѣлое число. Пусть отъ дѣленія c на b частное и остатокъ соответственно будутъ c_1 и q (если $c < b$, то $c_1=0$ и $q=c$), а отъ дѣленія a на b частное и остатокъ пусть будутъ a_1 и r ; тогда

$$y = c_1 - a_1x + \frac{q-rx}{b}.$$

Изъ этого уравненія заключаемъ: если x и y числа цѣлыя, то и частное $\frac{q-rx}{b}$ также число цѣлое; обратно, если частное $\frac{q-rx}{b}$ число цѣлое при цѣломъ значеніи x , то y число цѣлое; значитъ, для того, чтобы x и y были числа цѣлыя, необходимо и достаточно, чтобы выраженіе $\frac{q-rx}{b}$ было числомъ цѣлымъ при цѣломъ значеніи x .

Поэтому:

3°, приравниваемъ произвольному цѣлому числу z дробь, получившуюся послѣ

исключенія цѣлаго числа:

$$\frac{q-rx}{b}=t; \quad [2]$$

тогда $y=c_1-a_1x+t. \quad [4]$

Если мы найдемъ цѣлыя значенія для x и t , удовлетворяющія ур. [2], то, подставивъ ихъ въ ур. [4], найдемъ и для y соответствующее цѣлое число. Такимъ образомъ, рѣшеніе ур. [1] сводится къ рѣшенію ур. [2], которое можно писать такъ:

$$bt+rx=q.$$

Коэффициенты этого новаго уравненія меньше коэффициентовъ даннаго уравненія, потому что одинъ изъ нихъ равенъ меньшему коэффициенту даннаго уравненія (именно b), а другой (r) равенъ остатку отъ дѣленія бѣльшаго коэффициента даннаго уравненія на его меньшій коэффициентъ (отъ дѣленія a на b).

Тѣмъ же способомъ мы приведемъ уравненіе [2] къ третьему, у котораго коэффициенты еще меньше; это—къ четвертому, у котораго коэффициенты еще меньше, и т. д., пока, наконецъ, не получимъ уравненія, у котораго одинъ изъ коэффициентовъ будетъ 1 и которое, слѣд., рѣшается непосредственно.

Примѣръ. Рѣшмъ въ цѣлыхъ числахъ уравненіе: $26x-7y=43. \quad [1]$

Прилагая къ этому уравненію указанныя три приема, находимъ:

$$y=\frac{26x-43}{7}=3x-6+\frac{5x-1}{7}.$$

$$\frac{5x-1}{7}=t \quad [2] \quad y=3x-6+t \quad [4]$$

Изъ уравненія [2] опредѣляемъ неизвѣстное x , у котораго коэффициентъ меньше:

$$x=\frac{1+7t}{5}=t+\frac{1+2t}{5}.$$

Приравниваемъ $\frac{1+2t}{5}$ произвольному цѣлому числу t_1 :

$$\frac{1+2t}{5} = t_1 \quad [3] \qquad x = t + t_1 \qquad [B]$$

Изъ уравненія [3] опредѣляемъ неизвѣстное t , у котораго коэффициентъ меньше:

$$t = \frac{5t_1 - 1}{2} = 2t_1 + \frac{t_1 - 1}{2}.$$

Приравниваемъ $\frac{t_1 - 1}{2}$ произвольному цѣлому числу t_2 :

$$\frac{t_1 - 1}{2} = t_2 \quad [4] \qquad t = 2t_1 + t_2 \qquad [C]$$

Въ уравненіи [4], которое можно написать такъ: $t_1 - 1 = 2t_2$, коэффициентъ при одномъ неизвѣстномъ равенъ 1, а потому оно рѣшается непосредственно:

$$t_1 = 1 + 2t_2. \qquad [D]$$

Здѣсь t_2 можетъ принимать произвольныя цѣлыя значенія. Положивъ, напр., $t_2 = 0$, найдемъ: $t_1 = 1$; подставивъ эти числа въ ур. (C), получимъ $t = 2$; изъ ур. (B) находимъ: $x = 3$, и, наконецъ, ур. (A) даетъ $y = 5$. Назначивъ для t_2 какое-нибудь другое цѣлое число и переходя послѣдовательно черезъ уравненія (D), (C), (B) и (A), найдемъ соотвѣтствующія значенія x и y .

Впрочемъ, предпочитаютъ составлять формулы, выражающія x и y въ прямой зависимости отъ окончательнаго произвольнаго цѣлага числа. Переходя послѣдовательно отъ ур. (D) къ (C), отъ (C) къ (B) и отъ (B) къ (A), найдемъ посредствомъ подстановокъ:

$$t_1 = 1 + 2t_2; \quad t = 2(1 + 2t_2) + t_2 = 2 + 5t_2;$$

$$x = (2 + 5t_2) + (1 + 2t_2) = 3 + 7t_2;$$

$$y = 3(3 + 7t_2) - 6 + (2 + 5t_2) = 5 + 26t_2.$$

Равенства: $x = 3 + 7t_2$ и $y = 5 + 26t_2$,

которыя удобнѣе писать безъ знака при буквѣ t , т. е. такъ:

$$x = 3 + 7t \quad \text{и} \quad y = 5 + 26t,$$

представляютъ собою общее рѣшеніе даннаго уравненія, такъ

какъ, подставляя вмѣсто i произвольныя цѣлыя числа, какъ положительныя, такъ и отрицательныя, мы будемъ получать всевозможныя цѣлыя значенія x и y , удовлетворяющія данному уравненію. Нѣкоторыя изъ этихъ значеній помѣщены въ слѣдующей таблицѣ:

i	0	1	2	...	-1	-2	-3
x	3	10	17	...	-4	-11	-18
y	5	31	57	...	-21	-47	-73

278. Когда неопредѣленное уравненіе имѣетъ цѣлыя рѣшенія. Разсмотрѣвъ описанный способъ рѣшенія, мы замѣчаемъ, что коэффициенты послѣдовательныхъ уравненій находятся такъ: ббльшій коэффициентъ даннаго уравненія дѣлится на меньшій, и остатокъ принимается за меньшій коэффициентъ второго уравненія; затѣмъ меньшій коэффициентъ даннаго уравненія дѣлится на остатокъ, и остатокъ отъ этого дѣленія принимается за меньшій коэффициентъ третьяго уравненія; далѣе, первый остатокъ дѣлится на второй, второй на третій и т. д., при чемъ остатокъ отъ каждаго изъ этихъ дѣленій принимается за меньшій коэффициентъ слѣдующаго уравненія. Изъ ариметики извѣстно, что такимъ способомъ послѣдовательнаго дѣленія находится общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ. Но такъ какъ коэффициенты даннаго уравненія суть числа взаимно простые, то ихъ общій наибольшій дѣлитель есть 1; поэтому, дѣля ббльшій коэффициентъ на меньшій, потомъ меньшій на первый остатокъ, первый остатокъ на второй и т. д., мы непремѣнно дойдемъ до остатка, равнаго 1, т. е. получимъ уравненіе, у котораго одинъ изъ коэффициентовъ равенъ 1, а такъ какъ это уравненіе всегда рѣшается въ цѣлыхъ числахъ, то и данное уравненіе въ этомъ случаѣ допускаетъ цѣлыя рѣшенія.

Принявъ во вниманіе сказанное раньше (§ 269), приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Если въ уравненіи $ax+by=c$ коэффициенты a , b и c суть цѣлыя числа, но имѣющія дѣлители, общаго всёмъ имъ, то для того, чтобы такое уравненіе имѣло цѣлыя рѣшенія, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a и b были числа взаимно простые.

274. Нѣкоторыя упрощенія. I. Если въ уравненіи $ax+by=c$ числа a и c или b и c имѣютъ общаго дѣлителя то на него уравненіе можно сократить.

Пусть, напр., a и c дѣлятся на нѣкоторое число p , такъ что $a=a'p$ и $c=c'p$. Раздѣливъ на p всѣ члены уравненія, получимъ:

$$a'x + \frac{by}{p} = c';$$

откуда видно, что частное $\frac{by}{p}$ должно быть числомъ цѣлымъ; но b и p суть числа взаимно простые (въ противномъ случаѣ всѣ три числа: a , b и c имѣли бы общаго дѣлителя, большаго 1, и уравненіе могло бы быть сокращено). поэтому by раздѣлится на p только тогда, когда y раздѣлится на p . Положивъ $y=py'$, найдемъ:

$$\frac{by}{p} = by', \text{ и уравненіе будетъ } a'x + by' = c'.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ x и y' ; умноживъ на p выраженіе, полученное для y' , найдемъ y .

Примѣръ 1. Рѣшить уравненіе: $12x-7y=15$.

Положивъ $y=3y'$ и сокративъ уравненіе на 3, получимъ:

$$4x-7y'=5.$$

Откуда найдемъ: $x=3+7t$, $y=1+4t$,

слѣд., $y=(1+4t)3=3+12t$.

Примѣръ 2. Рѣшить уравненіе: $8x+21y=28$.

Замѣтимъ, что 8 и 28 дѣлятся на 4, положимъ $y=4y'$ и сократимъ уравненіе на 4:

$$2x+21y'=7.$$

Въ этомъ уравненіи 21 и 7 дѣлятся на 7; поэтому, положивъ $x=7x'$, сократимъ уравненіе на 7:

$$2x'+3y'=1.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ:

$$x'=-1+3t, \quad y'=1-2t.$$

Слѣд., $x=-7+21t$, $y=4-8t$.

II. При исключеніи цѣлаго числа изъ неправильной дроби можно пользоваться отрицательными остатками.

Примѣръ.

$$7x - 19y = 23$$

$$x = \frac{23 + 19y}{7} = 3 + 2y + \frac{2 + 5y}{7}.$$

Отъ дѣленія 19 на 7 получается остатокъ 5, большій половины 7-и; но если мы возьмемъ въ частномъ не 2, а 3, то получимъ отрицательный остатокъ—2, абсолютная величина котораго меньше половины 7-и. Очевидно, слѣдующее уравненіе будетъ съ меньшими коэффициентами, если мы воспользуемся этимъ отрицательнымъ остаткомъ, т. е. положимъ:

$$x = \frac{23 + 19y}{7} = 3 + 3y + \frac{2 - 2y}{7}.$$

III. Если числитель дроби, которую надо приравнять произвольному цѣлому числу, содержитъ нѣкакого множителя, то полезно его выключить. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ числитель дроби $\frac{2-2y}{7}$ содержитъ множителя 2; поэтому можно написать:

$$x = 3 + 3y + \frac{2(1-y)}{7}.$$

Такъ какъ 2 есть число взаимно простое съ 7, то для дѣлимости произведенія $2(1-y)$ на 7, необходимо и достаточно, чтобы $1-y$ дѣлилось на 7. Приравнявъ $\frac{1-y}{7}$ произвольному цѣлому числу t , получимъ:

$$1-y = 7t \text{ и } x = 3 + 3y + 2t.$$

Откуда:

$$y = 1 - 7t \text{ и } x = 3 + 3(1 - 7t) + 2t = 6 - 19t.$$

275. Зная одну пару цѣлыхъ рѣшеній, можемъ найти остальные. Пусть какимъ-нибудь способомъ (например, просто догадкой) мы нашли, что уравненіе $ax + by = c$ удовлетворяется парю цѣлыхъ рѣшеній: $x = \alpha$ и $y = \beta$; тогда, не рѣшая уравненія, легко составить формулы, включающія въ себѣ всевозможныя цѣлыя рѣшенія. Для этого разсуждаемъ такъ: если α и β есть пара рѣшеній уравненія $ax + by = c$, то мы должны имѣть тождество:

$$a\alpha + b\beta = c.$$

Вычтя почленно это тождество изъ даннаго уравненія, получимъ:

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0.$$

Примемъ въ этомъ уравненіи $x - \alpha$ за одно неизвѣстное, а $y - \beta$ за другое; тогда свободный членъ уравненія будетъ 0, и поэтому

мы можем воспользоваться формулами, выведенными для этого частного случая (§ 271):

$$\text{Откуда: } \begin{cases} x - \alpha = -bt \\ y - \beta = at \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - \alpha = bt \\ y - \beta = -at. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha - bt \\ y = \beta + at \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \alpha + bt \\ y = \beta - at. \end{cases}$$

Эти общія формулы можно высказать такъ: каждое неизвѣстное уравненіе $ax + by = c$ равно своему соответствующему частному значенію, сложенному съ произведеніемъ произвольнаго цѣлаго числа на коэффициентъ при другомъ неизвѣстномъ, при чемъ какой-нибудь одинъ изъ этихъ коэффициентовъ долженъ быть взятъ съ обратнымъ знакомъ.

Примѣръ 1. Уравненіе $3x + 4y = 13$ удовлетворяется значеніями $x=3$, $y=1$. Поэтому общія формулы будутъ:

$$x = 3 - 4t, \quad y = 1 + 3t$$

или

$$x = 3 + 4t, \quad y = 1 - 3t,$$

Примѣръ 2. Уравненіе $7x - 2y = 11$ имѣетъ пару рѣшеній: $x=1$, $y=-2$; поэтому общія формулы будутъ:

$$x = 1 + 2t, \quad y = -2 + 7t$$

или

$$x = 1 - 2t, \quad y = -2 - 7t.$$

Замѣчаніе. Выведенныя въ этомъ параграфѣ формулы должны быть тождественны тѣмъ формуламъ, которыя получаются въ результатъ обыкновеннаго рѣшенія неопредѣленнаго уравненія. Однако, вслѣдствіе произвольности числа t , эти формулы могутъ различаться по своему внѣшнему виду. Дѣйствительно, замѣняя t на $t \pm 1$, $t \pm 2$, $t \pm 3$. . . , мы будемъ получать другія формулы:

$$\begin{cases} x = (\alpha \mp b) \mp bt \\ y = (\beta \pm a) \pm bt \end{cases} \quad \begin{cases} x = (\alpha \mp 2b) \mp bt \\ y = (\beta \pm 2a) \pm at \end{cases} \quad \begin{cases} x = (\alpha \mp 3b) \mp bt \\ y = (\beta \pm 3a) \pm at \end{cases} \text{ и т. д.}$$

которыя, отличаясь внѣшнимъ видомъ, даютъ одинаковые результаты (конечно, не при одинаковыхъ значеніяхъ t). Полезно замѣтить, что во всѣхъ этихъ формулахъ коэффициентъ при t одинъ и тотъ же; это обстоятельство можетъ, до некоторой степени, служить повѣркой правильности рѣшенія: если въ результатѣ рѣшенія получается для какого-нибудь неизвѣстнаго формула, въ которой коэффициентъ при произвольномъ цѣломъ числѣ не равенъ коэффициенту при другомъ неизвѣстномъ, то рѣшеніе выполнено неправильно.

276 Теорема. Если въ уравненіи $ax \pm by = c$ все коэффициенты числа цѣлыя, при чемъ a и b числа положительныя и взаимно простыя то, подставляя вмѣсто x числа: $0, 1, 2, 3, \dots (b-1)$, или вмѣсто y числа: $0, 1, 2, 3, \dots (a-1)$, мы найдемъ для другого непавѣстнаго цѣловъ значеніе и только одно.

Док. Изъ уравненія выводимъ:

$$y = \pm \frac{c - ax}{b}.$$

Предварительно убѣдимся, что, подставляя въ $c - ax$ вмѣсто x числа: $0, 1, 2, \dots (b-1)$ и дѣля результаты на b , мы не можемъ получить двухъ одинаковыхъ положительныхъ остатковъ ¹⁾. Предположимъ обратное, напр., что $c - am$, и $c - an$, гдѣ m и n суть два числа изъ ряда: $0, 1, 2, \dots (b-1)$, при двѣ ея въ b даютъ одинъ и тотъ же положительный остатокъ r . Назвавъ частное отъ дѣленія $c - am$ на b черезъ q и $c - an$ на b черезъ p , получимъ:

$$c - am = bq + r \text{ и } c - an = bp + r.$$

Вычтя эти равенства почленно, найдемъ:

$$a(n - m) = b(q - p),$$

откуда:

$$\frac{a(n - m)}{b} = q - p.$$

Такъ какъ $q - p$ есть число цѣлое, то $a(n - m)$ должно дѣлиться на b ; но этого быть не можетъ, такъ какъ a и b числа взаимно простые, а $n - m < b$; значить, $c - am$ и $c - an$ не могутъ дать одного и того же положительнаго остатка.

Итакъ, подставляя въ $c - ax$ вмѣсто x числа: $0, 1, 2, \dots (b-1)$ и дѣля результаты на b , мы должны получать различныя положительныя остатки. Такъ какъ каждый остатокъ долженъ быть меньше b и число этихъ остатковъ есть b , то одинъ изъ нихъ долженъ равняться 0; другими словами, при одной изъ этихъ подстановокъ y окажется цѣлымъ числомъ.

Точно также можно доказать теорему и относительно x .

Доказанная теорема позволяетъ найти пару рѣшеній посредствомъ нѣсколькихъ испытаній, число которыхъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше одинъ изъ коэффициентовъ a и b .

Примѣръ. $5x - 2y = 17.$

Такъ какъ въ этомъ примѣрѣ коэффициентъ при y меньше коэффициента при x , то для уменьшенія числа испытаній выгодно дѣлать подстановки на мѣсто x

$$y = \frac{5x - 17}{2} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{17}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{12}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{7}{2} \end{cases}.$$

¹⁾ Если, при какой-нибудь изъ этихъ подстановокъ выраженіе $c - ax$ дадо бы отрицательное число, мы могли бы увеличить частное на 1, чтобы и въ этомъ случаѣ получить положительный остатокъ.

Такимъ образомъ, пара цѣлыхъ рѣшеній найдена: $x=1$, $y=-4$; значитъ, общія формулы будутъ:

$$x=1+3t, y=-4+5t.$$

277. Исключеніе отрицательныхъ рѣшеній.

Всѣ цѣлыя рѣшенія (положительныя, отрицательныя и нулевыя) уравненія $ax+by=c$ выражаются, какъ мы видѣли, формулами:

$$x=a-bt, y=\beta+at.$$

Отсюда видно, что x и y будутъ отрицательными числами только для такихъ значеній t , при которыхъ двучлены $a-bt$ и $\beta+at$ окажутся меньше 0. Желая исключить всѣ такія рѣшенія и оставить только цѣлыя положительныя или нулевыя рѣшенія, мы должны брать для t цѣлыя значенія, удовлетворяющія слѣдующимъ условіямъ:

$$a-bt > 0 \text{ и } \beta+at > 0^1)$$

Рѣшивъ эти неравенства, соединенныя съ равенствами, найдемъ для t два предѣла, которые ограничатъ произвольность въ выборѣ значеній этого числа. При этомъ могутъ представиться слѣдующіе 2 случая, смотря по тому, будетъ ли число b положительное или отрицательное (число a мы всегда можемъ сдѣлать положительнымъ, умноживъ, въ случаѣ надобности, всѣ члены уравненія на -1):

I. $b > 0$ Изъ неравенствъ находимъ:

$$bt < a \text{ и } at > -\beta.$$

Откуда:
$$t < \frac{a}{b} \text{ и } t > -\frac{\beta}{a}.$$

(Знакъ $=$ имѣетъ мѣсто, конечно, въ томъ только случаѣ, когда $\frac{a}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ суть числа цѣлыя).

Въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ столько рѣшеній, сколько есть цѣлыхъ чиселъ между $\frac{a}{b}$ и $-\frac{\beta}{a}$ (считая въ томъ числѣ и са-

¹⁾ Если бы мы хотѣли исключить еще и нулевыя рѣшенія, то должны были бы въ этихъ формулахъ оставить только знакъ $>$, а знакъ $=$ отбросить.

мы эти предѣлы, если они числа цѣлыя). Можетъ случиться, что между этими предѣлами нѣтъ ни одного цѣлаго числа; тогда уравненіе не имѣетъ ни одного цѣлаго положительнаго рѣшенія.

II. $b < 0$. Въ этомъ случаѣ неравенства даютъ:

$$\geq \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \geq \frac{\beta}{a}$$

(при дѣленіи на отрицательное число знакъ неравенства измѣняется). Такъ какъ эти предѣлы одинаковаго смысла, то достаточно взять изъ нихъ только одинъ, болѣе большой. Значитъ, въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Примѣръ 1. Найти цѣлыя положительныя (или нулевыя) рѣшенія ур. $7x + 9y = 5$.

Такъ какъ коэффициентъ при y положительное число, то утверждаемъ *a priori*, что данное уравненіе имѣетъ конечное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, или не имѣетъ ихъ вовсе. Дѣйствительно, рѣшивъ уравненіе, найдемъ:

$$x = 2 - 9t, \quad y = -1 + 7t.$$

Неравенства $2 - 9t \geq 0$ и $-1 + 7t \geq 0$
даютъ:

$$t \leq \frac{2}{9} \quad \text{и} \quad t \geq \frac{1}{7}.$$

(Знакъ $=$ опуцены, такъ какъ оба предѣла дробины).

Уравненіе не имѣетъ ни одного положительнаго цѣлаго рѣшенія.

Примѣръ 2. Найти цѣлыя положительныя (или нулевыя) рѣшенія ур. $33 - 5x = 3y$.

Сдѣлавъ коэффициентъ при x положительнымъ, получимъ:

$$5x + 3y = 33.$$

Рѣшивъ уравненіе, найдемъ: $x = 3t, \quad y = 11 - 5t$.

Неравенства $3t \geq 0$ и $11 - 5t \geq 0$
даютъ:

$$t \geq 0 \quad \text{и} \quad t \leq 2\frac{1}{5}.$$

Между этими предѣлами заключается слѣдующія три значенія: $t=0, t=1, t=2$, соотвѣтственно которымъ получимъ:

$$1) x=0, y=11; \quad 2) x=3, y=6; \quad 3) x=6, y=1.$$

Примѣръ 3. Найти цѣлыя положительныя (или нулевыя) рѣшенія ур. $29x - 30y = 5$.

Утверждаемъ *a priori*, что это уравненіе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Дѣйствительно, рѣшивъ уравненіе, находимъ:

$$x = -5 + 30t > 0, \quad y = -5 + 29t > 0, \\ t > \frac{1}{30}, \quad t > \frac{5}{29}.$$

Такъ какъ $\frac{5}{29} > \frac{1}{30}$, то достаточно положить, что $t > \frac{5}{29}$. Слѣдовательно, $t = 1, 2, 3, 4, \dots$

278. Два уравненія первой степени съ тремя неизвѣстными. Пусть требуется рѣшить въ цѣлыхъ числахъ систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = 21 \\ 5x - 4y + 6z = 48. \end{cases}$$

Исключивъ одно неизвѣстное, напр. z , получимъ одно уравненіе съ 2 неизвѣстными:

$$47x - 10y = 462.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ:

$$x = 6 + 10t, \quad y = -18 + 47t,$$

гдѣ t есть произвольное цѣлое число, пока рѣчь идетъ только о томъ, чтобы x и y были цѣлыя. Чтобы опредѣлить, какія значенія можно давать для t , чтобы и z было также цѣлымъ числомъ, вставимъ полученныя выраженія вмѣсто x и y въ одно изъ данныхъ уравненій, напр., въ 1-е; отъ этого получимъ одно уравненіе съ неизвѣстными t и z :

$$161t - 7z = 63 \quad \text{или} \quad 23t - z = 9.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ:

$$z = 23t - 9.$$

Для полученія положительныхъ (и нулевыхъ) рѣшеній надо рѣшить неравенства, соединенныя съ равенствами:

$$6 + 10t \geq 0, \quad -18 + 47t \geq 0, \quad 23t - 9 \geq 0.$$

Отсюда находимъ: $t \geq -\frac{3}{5}$, $t \geq \frac{18}{47}$ и $t \geq \frac{9}{23}$.

Слѣдов., для t можно брать числа: 1, 2, 3, 4, ...

Такимъ образомъ, рѣшеніе системы двухъ уравненій первой степени съ 3 неизвѣстными сводится къ двукратному рѣшенію одного уравненія съ 2 неизвѣстными.

ОТДѢЛЪ VII.

Обобщеніе понятія о показателѣ.

Дробные и несоизмѣримые показатели¹⁾.

279. Опредѣленіе дробнаго показателя. Мы видѣли (§ 166, теор. 2-я), что при извлеченіи корня изъ степени дѣлать показателя подкореннаго числа на показателя корня, если такое дѣленіе выполняется нацѣло. Теперь мы условимся распространить это правило и на тотъ случай, когда показатель подкореннаго числа не дѣлится нацѣло на показателя корня. Въ такомъ случаѣ въ результатѣ извлеченія мы должны получить степень съ дробнымъ показателемъ; напр.:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^k} & \text{ выразится } a^{\frac{k}{n}}, \\ \sqrt[n]{a^m} & \text{ „ } a^{\frac{m}{n}}, \text{ и т. п.} \end{aligned}$$

Само собою разумѣется, что дробные показатели не могутъ имѣть того значенія, какимъ обладаютъ цѣлые положительныя показатели; напр., нельзя понимать степень $a^{\frac{2}{3}}$ въ томъ смыслѣ, что a берется сомножителемъ $\frac{2}{3}$ раза, такъ какъ выраженіе « $\frac{2}{3}$ раза» не имѣетъ смысла. Степень $a^{\frac{m}{n}}$ есть только иной видъ радикала, у котораго показатель подкореннаго числа есть m , а показатель самого радикала есть n . Такимъ образомъ, $a^{\frac{2}{3}}$ есть не что иное, какъ $\sqrt[n]{a^m}$, $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ есть иной видъ выраженія $\sqrt{1+x}$, и т. п.

¹⁾ Передъ этою статью полезно повторить все, относящееся до отрицательныхъ показателей (см §§ 68, 91, 92, 93, 156, 208, 4^е).

Условно допускаются также и отрицательные дробные показатели въ томъ смыслѣ, что число съ такимъ показателемъ равносильно дроби, у которой числитель есть 1, а знаменатель то же число съ положительнымъ показателемъ; такъ:

$$\frac{1}{a^{-4}} = \frac{1}{\frac{1}{a^4}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}}.$$

280. Ирраціональному выраженію можно придать видъ раціональнаго. Дробные показатели даютъ возможность представить ирраціональное выраженіе подъ видомъ раціональнаго; напр., выраженіе $3\sqrt[3]{a\sqrt{x^2}}$ можно представить такъ: $3a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$. Конечно, такое преобразование измѣняетъ только внѣшній видъ выраженія, а не содержанія его; однако подобное измѣненіе имѣетъ важное значеніе, такъ какъ оказывается, что всѣ дѣйствія надъ степенями, имѣющими дробныхъ показателей, можно производить по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для цѣлыхъ показателей. Докажемъ это.

281. Основное свойство дробнаго показателя.

Если дробнаго показателя $\frac{m}{n}$ замѣнимъ равнымъ ему показателемъ $\frac{m'}{n}$, то величина степени не измѣняется.

Пусть $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n}$; требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n}}$. Для доказательства замѣнимъ степени съ дробными показателями ихъ настоящими значеніями:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{\frac{m'}{n}} = \sqrt[n]{a^{m'}}.$$

Приведа эти радикалы къ одинаковому показателю, получимъ:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot n']{a^{mn'}}; \quad \sqrt[n]{a^{m'}} = \sqrt[n \cdot n']{a^{m'n}}.$$

Но изъ равенства $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n}$ слѣдуетъ, что $mn' = n'm$; значить

$$\sqrt[n \cdot n']{a^{mn'}} = \sqrt[n \cdot n']{a^{m'n}}, \text{ т. е. } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{m'}} \text{ или } a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n}}.$$

Основываясь на доказанномъ свойствѣ, мы можемъ преобразовывать дробнаго показателя совершенно такъ же, какъ о б ы к н о в е н н у ю д р о б ь , лишь бы только преобразование не измѣняло величины показателя; напр., мы можемъ числителя и знаменателя дробнаго показателя умножить или раздѣлить на одно и то же число (ср. съ § 205).

282. Дѣйствія надъ степенями съ дробными положительными показателями. Предстоитъ доказать, что къ дробнымъ положительнымъ показателямъ примѣнимы правила, выведенныя раньше для цѣлыхъ показателей. Ходъ доказательства для всѣхъ дѣйствій одинъ и тотъ же: степени съ дробными показателями замѣняемъ радикалами; производимъ дѣйствіе по правилу о радикалахъ; результатъ выражаемъ дробнымъ показателемъ и затѣмъ его сравниваемъ съ тѣмъ, что требовалось доказать.

Умноженіе. Требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$.

$$\begin{aligned} \text{Д о к. } a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[n]{a^m} \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \sqrt[q]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = \\ &= a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} + \frac{pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Полагая $n=1$, или $q=1$, найдемъ, что правило о сложении показателей распространяется и на тотъ случай, когда одинъ изъ показателей—дробь, а другой—цѣлое число.

Дѣленіе. Требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$.

$$\begin{aligned} \text{Д о к. } a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[q]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = \\ &= a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} - \frac{pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Доказательство не теряетъ силы, если положимъ $n=1$ или $q=1$.

Возвышеніе въ степень. Требуется доказать, что

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}.$$

$$\text{Д о к. } (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{m \cdot \frac{p}{q}}}} = \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{nq}}} = \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{nq}}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot q}}.$$

Доказательство не теряет силы, если положимъ $n=1$ или $q=1$.

Извлеченіе корня. Требуется доказать, что

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n \cdot p}}.$$

$$\text{Д о к. } \sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n \cdot p]{a^m} = a^{\frac{m}{n \cdot p}} = a^{\frac{m}{n \cdot p}}.$$

Докажемъ еще, что теоремы о возвышеніи въ степень произведенія и дроби (§ 155) остаются вѣрными и для дробныхъ показателей.

I. Требуется доказать, что $(abc)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}}$.

$$\text{Д о к. } (abc)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(abc)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m c^m} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{b^m} \sqrt[n]{c^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}}.$$

II. Требуется доказать, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

$$\text{Д о к. } \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}.$$

233. Дѣйствія надъ степенями съ дробными отрицательными показателями. Если показатели не только дробные, но и отрицательные, то и въ этомъ случаѣ къ нимъ можно примѣнять правила, относящіяся до положительныхъ показателей. Покажемъ это для какого-нибудь одного дѣйствія, напр. для умноженія.

Пусть требуется доказать, что $a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n} + (-\frac{p}{q})}$.

$$\text{Д о к. } a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}} = a^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{m}{n} + \left(-\frac{p}{q}\right)}.$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что и другія дѣйствія можно совершать по правиламъ, относящимся до положительныхъ показателей.

284. Понятіе о несоизмѣримомъ показателѣ.

Относительно несоизмѣримыхъ показателей мы ограничимся сообщеніемъ только самыхъ элементарныхъ свѣдѣній. Прежде всего замѣтимъ, что выраженію a^x въ которомъ a несоизмѣримое число, придаютъ смыслъ только тогда, когда основаніе a положительное. При этомъ могутъ представиться слѣдующіе 3 случая.

1 - й с л у ч а й: показатель x есть положительное несоизмѣримое число, при чемъ основаніе a больше 1.

Обозначимъ черезъ α_1 любое приближенное соизмѣримое значеніе числа x , взятое съ недостаткомъ, и черезъ α_2 любое приближенное соизмѣримое значеніе числа x , взятое съ избыткомъ. Тогда выраженіе a^x означаетъ число, которое больше всякой степени a^{α_1} и меньше всякой степени a^{α_2} . Если, напр., $x = \sqrt{2}$, то a^x означаетъ число, большее каждаго изъ чиселъ ряда:

$$a^{1,4}, a^{1,41}, a^{1,414}, a^{1,4142}, \dots \quad (1)$$

въ которомъ показатели при a суть десятичныя приближенныя значенія $\sqrt{2}$, взятые всё съ недостаткомъ, и меньшее каждаго изъ чиселъ ряда:

$$a^{1,5}, a^{1,49}, a^{1,415}, a^{1,4143}, \dots \quad (2)$$

въ которомъ показатели суть десятичныя приближенныя значенія $\sqrt{2}$, взятые всё съ избыткомъ.

2 - й с л у ч а й: показатель x есть положительное несоизмѣримое число, но $a < 1$.

Тогда выраженіе a^x означаетъ число, которое меньше всякой степени a^{α_1} и больше всякой степени a^{α_2} . Такъ, если $x = \sqrt{2}$, то a^x при $a < 1$ представляетъ собою число, меньшее каждаго изъ чиселъ ряда (1) и большее каждаго изъ чиселъ ряда (2).

3 - й с л у ч а й: показатель x есть отрицательное несоизмѣримое число и $a \leq 1$.

Тогда выраженію a^α придаютъ тотъ же смыслъ, какой имѣютъ степени съ отрицательными соизмѣримыми показателями;

$$\text{такъ, } a^{-\sqrt{3}} = \frac{1}{a^{\sqrt{3}}}.$$

При подробномъ изложеніи теоріи несоизмѣримыхъ показателей ¹⁾ доказывается, что, во-1-хъ, число, ббльшее (меньшее) всякой степени a^α и меньшее (ббльшее) всякой степени a^β , существуетъ и притомъ только одно при всякомъ данномъ положительномъ a , и во-2-хъ, что съ несоизмѣримыми показателями можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для показателей соизмѣримыхъ; такъ:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

285. Примѣры на дѣйствія съ дробными и отрицательными показателями.

$$1) \frac{2a^{2\frac{7}{8}}b^{-3} \cdot 5a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{6}}}{3a^{-4}b \sqrt{a^3b^5}} = \frac{2a^{2\frac{7}{8}}b^{-3} \cdot 5a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{6}}}{3a^{-4}b^2} = \frac{10a^{\frac{31}{12}}b^{-\frac{17}{6}}}{3a^{-2}b^{\frac{12}{2}}} = \frac{10}{3} a^{\frac{37}{12}} b^{-\frac{57}{12}} =$$

$$= \frac{10}{3} \sqrt[12]{\frac{a^{37}}{b^{57}}} = \frac{10a^3}{3b^4} \sqrt[12]{\frac{a}{b^9}};$$

$$2) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}\right) = \left[a^{\frac{1}{2}} + \left(b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right)\right] \left[a^{\frac{1}{2}} - \left(b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right)\right] =$$

$$= a - \left(b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a - b - c + 2b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} = a - b - c + 2\sqrt{bc};$$

$$3) \sqrt{12a^{-4}b^3} : \left[\left(\frac{a^5}{3b^{-4}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{4}} = \left(2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} a^{-2} b^{\frac{3}{2}}\right) : \frac{\frac{5}{2} a}{3^2 b^2} =$$

$$= 2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{7}{2}} = 2b^3 \sqrt{ab}.$$

¹⁾ Такое изложеніе помѣщено нами въ концѣ этой книги (см. Приложение 1-е).

ОТДѢЛЪ VIII.

Прогрессіи и логариёмы.

ГЛАВА I.

Ариѳметическая прогрессія.

286. Опреѣленіе. Ариѳметической прогрессіей называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, сложенному съ однимъ и тѣмъ же постояннымъ для этого ряда числомъ (положительнымъ и отрицательнымъ).

Такъ, два ряда:

$$\div 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20,$$

$$\div: 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4$$

представляютъ собою ариѳметическія прогрессіи, потому что каждое число въ нихъ, начиная со второго, равно предшествующему, сложенному съ однимъ и тѣмъ же для каждого ряда числомъ, именно: въ первомъ ряду—съ числомъ 3, а во второмъ—съ числомъ -2 .

Числа, составляющія прогрессію, наз. ея ч л е н а м и. Положительное или отрицательное число, которое надо прибавить къ предшествующему члену, чтобы получить послѣдующій, наз. разностью прогрессіи.

Прогрессія наз. в о з р а с т а ю щ е ю, когда члены ея увеличиваются по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; она наз. у б ы в а ю щ е ю, когда члены ея уменьшаются по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; значить, разность первой прогрессіи—положительное число, второй—отрицательное.

Для обозначенія того, что данный рядъ представляет собою арифметическую прогрессию, ставятъ иногда въ началѣ ряда знакъ \div .

Обыкновенно принято обозначать: первый членъ a , послѣдній l , разность d , число всѣхъ членовъ n и сумму ихъ s .

287. Теорема. Всякій членъ арифметической прогрессіи, начиная со второго, равенъ первому ея члену, сложенному съ произведеніемъ разности прогрессіи на число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.

До к. Пусть имѣемъ прогрессию:

$$\div a, b, c, d \dots k, l,$$

у которой разность d . Изъ опредѣленія прогрессіи слѣдуетъ:

$$\begin{array}{l} 2\text{-й членъ } b, \text{ имѣющій передъ собою } 1 \text{ чл.} = a + d \\ 3\text{-й } \gg c, \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad 2 \gg = b + d = a + 2d \\ 4\text{-й } \gg d, \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad 3 \gg = c + d = a + 3d \\ \dots \dots \dots \end{array}$$

Этотъ законъ обладаетъ общностью, потому что, переходя отъ какого-нибудь члена къ слѣдующему, мы должны увеличить на 1 число предшествующихъ членовъ и вмѣстѣ съ тѣмъ прибавить 1 разъ разность.

Такимъ образомъ, 10-й членъ прогрессіи равенъ $a + 9d$; вообще, n -й членъ равенъ $a + d(n-1)$.

Слѣдствіе 1. Примѣняя доказанную теорему къ послѣднему члену прогрессіи, т.е. къ n -му, получимъ:

$$l = a + d(n-1)$$

т.е. послѣдній членъ арифметической прогрессіи равенъ первому ея члену, сложенному съ произведеніемъ разности прогрессіи на число всѣхъ членовъ, уменьшенное на единицу.

Примѣръ 1. Опредѣлить 12-й членъ прогрессіи: 3, 7, 11...

Такъ какъ разность данной прогрессіи равна 4, то 12-й членъ ея будетъ:

$$3 + 4 \cdot 11 = 47.$$

Примѣръ 2. Найти 10-й членъ прогрессіи: 40, 37, 34...

Такъ какъ разность этой прогрессіи равна -3 , то 10-й членъ ея будетъ:

$$40 + (-3) \cdot 9 = 40 - 27 = 13.$$

Слѣдствіе 2. Арифметическую прогрессію, у которой первый членъ есть a , разность d и число членовъ n , можно изобразить такъ:

$$\div a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+d(n-1).$$

288. Лемма. Сумма двухъ членовъ арифметической прогрессіи, равноотстоящихъ отъ концовъ ея, равна суммѣ крайнихъ членовъ.

До к. Пусть имѣемъ прогрессію:

$$\div \overbrace{a, b, \dots, e, \dots, h, \dots, k}^m, l,$$

въ которой e есть m -й членъ отъ начала, а h есть m -й членъ отъ конца. Тогда, по доказанному (если черезъ d обозначимъ разность прогрессіи):

$$e = a + d(m-1). \quad (1)$$

Для опредѣленія члена h замѣтимъ, что если данную прогрессію напишемъ съ конца:

$$\overbrace{l, k, \dots, h, \dots, e, \dots, b, a}^m,$$

то получимъ тоже прогрессію, у которой первый членъ есть l , а разность равна $-d$. Въ этой прогрессіи членъ h есть m -й отъ начала, а потому:

$$h = l + (-d)(m-1) = l - d(m-1). \quad (2)$$

Сложивъ равенства [1] и [2], получимъ:

$$e + h = a + l.$$

Напр., въ прогрессіи: 12, 7, 2, -3 , -8 , -13 , -18 находимъ: $12 + (-18) = -6$; $7 + (-13) = -6$; $2 + (-8) = -6$; $-3 + (-3) = -6$.

239. Теорема. Сумма всех членов арифметической прогрессии равна полусуммѣ крайнихъ ея членовъ, умноженной на число всехъ членовъ.

До к. Если сложимъ почленно два равенства:

$$\begin{cases} s = a + b + c + \dots + i + k + l \\ s = l + k + i + \dots + c + b + a, \end{cases}$$

то получимъ: $2s = (a+l) + (b+k) + (c+i) + \dots + (l+a)$.

Двучлены, стоящие внутри скобокъ, представляютъ собою суммы членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ прогрессии; по доказанному, каждая изъ этихъ суммъ равна $a+l$; поэтому:

$$2s = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots [n \text{ разъ}],$$

т.-е. $2s = (a+l)n$; откуда $s = \frac{(a+l)n}{2}$.

Замѣчаніе. Если въ формулу для суммы вмѣсто члена l вставимъ равное ему выраженіе $a+d(n-1)$, то получимъ:

$$s = \frac{[2a + d(n-1)]n}{2}.$$

Эта формула опредѣляетъ сумму въ зависимости отъ перваго члена, разности и числа членовъ данной прогрессии.

Примѣръ 1. Опредѣлить сумму натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n включительно.

Рядъ: 1, 2, 3, ..., $(n-1)$, n представляетъ собою арифметическую прогрессию, у которой первый членъ есть 1, разность 1, число членовъ n , послѣдній членъ тоже n ; поэтому:

$$s = \frac{(1+n)n}{2}.$$

Такъ: $1+2+3+4+5+6 = \frac{(1+6) \cdot 6}{2} = 21$.

Примѣръ 2. Найти сумму первыхъ n нечетныхъ чиселъ.

Рядъ: 1, 3, 5, 7, ... есть арифметическая прогрессія, у ко-

торой, первый членъ есть 1 и разность 2. Если возьмемъ n членовъ, то послѣдній членъ будетъ $1+2(n-1)=2n-1$. Поэтому:

$$s = \frac{[1+(2n-1)]n}{2} = n^2.$$

Такъ: $1+3=4=2^2$; $1+3+5=9=3^2$; $1+3+5+7=16=4^2$; и т. д.

Примѣръ 3. Найти сумму 10 членовъ прогрессіи: 3, $2\frac{1}{2}$, 2...

Въ этой прогрессіи разность равна $-\frac{1}{2}$; поэтому 10-й членъ будетъ $3-\frac{1}{2} \cdot 9 = -1\frac{1}{2}$, и искомая сумма

$$s = \frac{[3+(-1\frac{1}{2})]10}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

Дѣйствительно: $3+2\frac{1}{2}+2+1\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}-1-1\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$.

290. Такъ какъ для 5 чиселъ a , l , d , n и s мы имѣемъ два уравненія:

$$1) l = a + d(n-1), \text{ и } 2) s = \frac{(a+l)n}{2},$$

то по даннымъ значеніямъ трехъ изъ этихъ чиселъ мы можемъ находить значенія остальныхъ двухъ. Рѣшимъ для примѣра слѣдующую задачу.

Задача. Определить число членовъ арифметической прогрессіи, у которой сумма равна 12, первый членъ 7, а разность есть -2 .

Для этой задачи уравненія даютъ:

$$l = 7 - 2(n-1) = 9 - 2n \text{ и } 12 = \frac{(7+l)n}{2}.$$

Откуда подстановкою находимъ:

$$12 = \frac{(7+9-2n)n}{2} = (8-n)n$$

или

$$n^2 - 8n + 12 = 0,$$

слѣд.,

$$n = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2,$$

значить,

$$n_1 = 6, \quad n_2 = 2.$$

Такимъ образомъ предложенная задача имѣеть два отвѣта: число членовъ прогрессіи или 6, или 2. И дѣйствительно, двѣ прогрессіи:

$$\div 7, 5, \text{ и } \div 7, 5, 3, 1, -1, -3$$

имѣють одну и ту же сумму 12.

Г Л А В А II.

Геометрическая прогрессія.

291. **Опредѣленіе.** Геометрической прогрессіей называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, умноженному на одно и то же постоянное для каждого ряда число (положительное или отрицательное). Такъ, три ряда:

$$\begin{aligned} &\div 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, \\ &\div 8, -16, 32, -64, 128, -256, 512, \\ &\div 20, 10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \frac{5}{32} \end{aligned}$$

представляютъ собою геометрическія прогрессіи, потому что въ этихъ рядахъ каждое число, начиная со второго, получается изъ предшествующаго умноженіемъ: въ первомъ ряду на 3, во второмъ на -2 , въ третьемъ на $\frac{1}{2}$.

Числа, составляющія прогрессію, наз. ея ч л е н а м и. Постоянное для каждой прогрессіи число, на которое надо умножить какой-нибудь членъ прогрессіи, чтобы получить слѣдующій членъ, наз. знаменателемъ прогрессіи.

Геометрическая прогрессія наз. возрастающею или убывающею, смотря по тому, увеличивается или уменьшается абсолютная величина членовъ прогрессіи по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; такъ, изъ трехъ указанныхъ выше прогрессій первая и вторая—возрастающія, а третья—убывающая. Въ возрастающей прогрессіи абсолютная величина знаменателя больше 1, въ убывающей меньше 1.

Такъ какъ знаменатель этой прогрессіи есть $\frac{1}{2}$, то 10-й членъ $= 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 20 \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{5}{2^7} = \frac{5}{128}$.

Примѣръ 3. Опредѣлить 4-й членъ прогрессіи:

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}} \dots \\ \text{Знам.} &= \frac{1}{2-\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \\ \text{4-й членъ} &= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^3}{2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Слѣдствіе 2. Геометрическую прогрессію, у которой первый членъ есть a , число членовъ n и знаменатель q , можно изобразить такъ:

$$\therefore a, aq, aq^2, aq^3 \dots aq^{n-1}.$$

293. Теорема. Сумма всѣхъ членовъ геометрической прогрессіи равна дроби, у которой числитель есть разность между произведеніемъ послѣдняго члена на знаменателя прогрессіи и первымъ членомъ, а знаменатель есть разность между знаменателемъ прогрессіи и единицею, т.е.

$$s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

До к. По опредѣленію геометрической прогрессіи:

$$\left\{ \begin{array}{l} b = aq \\ c = bq \\ d = cq \\ \dots \\ k = iq \\ l = kq \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Сложимъ эти равенства почленно; тогда въ лѣ-} \\ \text{вой части получается сумма всѣхъ членовъ безъ} \\ \text{... перваго, а въ правой — произведеніе знамена-} \\ \text{... теля } q \text{ на сумму всѣхъ членовъ безъ послѣд-} \\ \text{няго.} \end{array}$$

$$s - a = (s - l)q.$$

Остается решить это уравнение относительно s :

$$s - a = sq - lq; \quad lq - a = sq - s = s(q - 1),$$

$$s = \frac{lq - a}{q - 1}, \quad (1)$$

294. Два другихъ выраженія для суммы.

1°. Умноживъ числителя и знаменателя формулы (1) на -1 , мы придадимъ другой видъ выраженію суммы, который тоже полезно запомнить:

$$s = \frac{a - lq}{1 - q}. \quad (2)$$

Послѣдняя формула удобна для прогрессіи убывающей, потому что тогда $a > lq$ и $1 > q$.

2° Замѣнивъ членъ l въ равенствахъ (1) и (2) равнымъ ему выраженіемъ aq^{n-1} , найдемъ:

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1} \quad \text{или} \quad s = \frac{a - aq^n}{1 - q}. \quad (3)$$

Эти формулы удобно употреблять тогда, когда членъ l неизвестенъ.

Примѣръ 1. Определить сумму 10 членовъ прогрессіи: 1, 2, 2²...

Въ этой прогрессіи $a=1$, $q=2$, $l=1$. $2^0=2^0$; поэтому:

$$s = \frac{2^0 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023.$$

Примѣръ 2. Определить сумму 8 членовъ прогрессіи: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

Здѣсь $a=1$, $q=\frac{1}{2}$, $l=1 \cdot (\frac{1}{2})^7$, поэтому:

$$s = \frac{1 - (\frac{1}{2})^8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3280}{2187}.$$

295. Два уравненія: $l = aq^{n-1}$ и $s = \frac{lq - a}{q - 1}$ содержатъ 5 чиселъ и потому позволяютъ по даннымъ тремъ изъ нихъ найти остальные два. Решимъ для примѣра слѣдующую задачу.

Задача. По даннымъ s , q и n найти a и l .
Изъ уравненія:

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

находимъ:

$$a = \frac{s(q-1)}{q^n - 1},$$

послѣ чего получимъ:

$$l = aq^{n-1} = \frac{s(q-1)}{q^n - 1} q^{n-1}.$$

296. Безконечная геометрическая прогрессія. Если рядъ чиселъ, составляющихъ прогрессію, предполагается продолженнымъ безъ конца, то прогрессія наз. б е з к о н е ч н о й. Огносительно такихъ прогрессій докажемъ слѣдующія 3 теоремы.

Теорема 1. Абсолютная величина члена безконечной геометрической возрастающей прогрессіи, по мѣрѣ удаленія его отъ начала ряда, можетъ превзойти какое угодно данное число (какъ бы велико оно ни было).

Пусть q есть абсолютная величина знаменателя геометрической прогрессіи и a абсолютная величина ея перваго члена; тогда абс. величина членовъ прогрессіи выразится такъ:

$$\therefore a, aq, aq^2, aq^3, \dots aq^n \dots$$

Требуется доказать, что, если $q > 1$, т.е. если прогрессія возрастающая, то при неограниченномъ возрастаніи n членъ aq^n можетъ превзойти какое угодно данное число A (какъ бы велико это число ни было). Для этого возьмемъ сумму первыхъ n членовъ данной прогрессіи:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{aq^n - a}{q - 1}.$$

Такъ какъ $q > 1$, то каждое слагаемое этой суммы, начиная со втораго, больше a , а потому вся сумма больше числа a , повтореннаго n разъ, т.е. больше an ; значить:

$$\frac{aq^n - a}{q - 1} > an.$$

Умноживъ обѣ части этого неравенства на положительное число $q-1$, мы не измѣнимъ знака неравенства; поэтому $aq^n - a > an(q-1)$; откуда: $aq^n > an(q-1) + a$.

Чтобы число aq^n сдѣлалось больше данного числа A , достаточно, очевидно, взять n настолько большимъ, чтобы удовлетворялось неравенство:

$$a(q-1)n + a \geq A;$$

т. е. взять n настолько большимъ, чтобы

$$n \geq \frac{A-a}{a(q-1)},$$

что вполне возможно (какъ бы велико ни было число A), такъ какъ n мы можемъ сдѣлать сколько угодно большимъ.

Примѣръ. Пусть $a=1$, $q=1,2$ и $A=1000$.

Тогда $n \geq \frac{1000-1}{1(1,2-1)}$, т. е. $n \geq \frac{999}{0,2}$ или $n \geq 4995$.

Значитъ, можемъ ручаться, что всѣ члены, начиная съ 4995-го, окажутся болѣе 1000.

Теорема 2. Абсолютная величина члена бесконечной геометрической убывающей прогрессии, по мѣрѣ удаленія его отъ начала ряда, можетъ сдѣлаться меньше какого угодно данного положительнаго числа (какъ бы мало оно ни было).

Пусть попрежнему абс. величина членовъ прогрессии есть:

$$\div \div a, aq, aq^2, aq^3 \dots aq^n \dots$$

Требуется доказать, что если $q < 1$, т. е. если прогрессія убывающая, то при неограниченномъ возрастаніи n членъ aq^n можетъ сдѣлаться меньше какого угодно даннаго положительнаго числа k (какъ бы мало это число ни было). Для доказательства возьмемъ вспомогательную прогрессію:

$$\div \div \frac{1}{a}, \frac{1}{aq}, \frac{1}{aq^2}, \frac{1}{aq^3} \dots \frac{1}{aq^n} \dots$$

Эта прогрессія возрастающая, такъ какъ ея знаменатель есть дробь $\frac{1}{q}$, которая, при $q < 1$, больше 1. По доказанному

въ теоремѣ 1-й, n -й членъ этой прогрессіи, т.-е. $\frac{1}{aq^n}$, при неограниченномъ возрастаніи n , можетъ сдѣлаться больше какого угодно даннаго числа A (какъ бы велико оно ни было). Возьмемъ за A число $\frac{1}{k}$. Тогда при достаточно большемъ n будетъ имѣть мѣсто неравенство:

$$\frac{1}{aq^n} > \frac{1}{k}; \text{ откуда: } aq^n < k.$$

Теорема, такимъ образомъ, доказана.

Теорема 3. Сумма первыхъ n членовъ безконечной геометрической убывающей прогрессіи:

$$\therefore a, aq, aq^2, aq^3 \dots aq^{n-1}, aq^n \dots$$

при неограниченномъ увеличеніи числа ихъ n приближается къ постоянному числу

$$\frac{a}{1-q}$$

такъ, что разность между этимъ постояннымъ числомъ и суммою членовъ прогрессіи дѣлается меньше любого даннаго положительнаго числа (какъ бы мало оно ни было).

Дѣйствительно, сумма первыхъ n членовъ этой прогрессіи равна (§ 294):

$$\frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

т.-е. она равна постоянному числу $\frac{a}{1-q}$, уменьшенному на

дробь $\frac{aq^n}{1-q}$. Но при неограниченномъ возрастаніи n абсолют-

ная величина числителя этой дроби, по доказанному, дѣлается меньше какого угодно даннаго положительнаго числа (какъ бы мало оно ни было); и такъ какъ знаменатель этой дроби есть число постоянное, то, значить, и сама дробь дѣлается какъ угодно малой.

Опредѣленіе. Если какая-нибудь переменная величина при своемъ измѣненіи приближается къ нѣкоторой постоянной величинѣ такъ, что разность между ними дѣлается (и при дальнѣйшемъ измѣненіи переменной остается) какъ угодно малой, то эта постоянная величина наз. предѣломъ переменной.

Принявъ это опредѣленіе во вниманіе, мы можемъ теорему 3-ю высказать такъ:

сумма первыхъ n членовъ безконечной геометрической убывающей прогрессіи, при неограниченномъ увеличеніи числа ихъ n , стремится къ предѣлу, равному частному отъ дѣленія перваго члена этой прогрессіи на разность между 1 и знаменателемъ прогрессіи.

Предѣлъ этотъ принято называть суммою членовъ безконечной геометрической убывающей прогрессіи (обозначается буквою s).

Примѣръ 1. Найти сумму: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

Здѣсь $a=1$, $q=\frac{1}{2}$; поэтому $s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Примѣръ 2. Найти сумму: $\frac{3}{2} + (-\frac{2}{3}) + \frac{6}{27} \dots$

Здѣсь $a = \frac{3}{2}$, $q = -\frac{2}{3}$; поэтому

$$s = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{13}{9}} = \frac{27}{26}.$$

Примѣръ 3. Определить точную величину чистой периодической дроби: $0,232323\dots$

Точная величина этой дроби есть предѣлъ суммы: $\frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \dots$, которая, очевидно, представляетъ собою сумму членовъ геометрической прогрессіи; у нея первый членъ

есть $\frac{23}{100}$, а знаменатель $= \frac{1}{100}$; поэтому:

$$s = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{23}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{23}{99}.$$

То же число мы получили бы по правилу, указываемому въ арифметикѣ.

Примѣръ 4. Определить точную величину смѣшанной периодической дроби 0,3545454...

Точная величина этой дроби есть предѣлъ суммы:

$$\frac{3}{10} + \frac{54}{1000} + \frac{54}{100000} + \frac{54}{10000000} + \dots$$

Слагаемыя этой суммы, начиная со второго, суть члены безконечной геометрической убывающей прогрессіи, у которой первый членъ есть $\frac{54}{1000}$ и знаменатель $\frac{1}{100}$. Поэтому предѣлъ суммы равенъ:

$$\frac{3}{10} + \frac{\frac{54}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{3}{10} + \frac{54}{990} = \frac{3 \cdot 99 + 54}{990} = \frac{3 \cdot 100 - 3 + 54}{990} = \frac{354 - 3}{990}.$$

То же число мы получили бы по правилу арифметики.

ГЛАВА III.

Общія свойства логарифмовъ.

297. Предварительное замѣчаніе. Если въ равенствѣ: $a^b = N$, числа a и b даны, а число N требуется найти, то дѣйствіе, потребное для этого, называется, какъ мы знаемъ, возвышеніемъ въ степень: N есть степень, a —основаніе степени, b —ея показатель. Этому дѣйствію соответствуютъ два обратныя: одно—нахожденіе основанія a по даннымъ степени N и показателю b (называется ивлеченіемъ корня), другое—нахожденіе показателя b

по даннымъ степени N и основанію a (называется нахожденіемъ л о г а р и о м а числа N по основанію a). Поставимъ вопросъ, различны ли эти дѣйствія? Вѣдь и для умноженія можно усмотрѣть два обратныя дѣйствія: первое—нахожденіе множимаго по даннымъ произведенію и множителю, второе—нахожденіе множителя по даннымъ произведенію и множимому. Однако дѣйствія эти рассматриваются не какъ различныя, а какъ одно и то же дѣйствіе, называемое дѣленіемъ. Причина сліянія этихъ двухъ обратныхъ дѣйствій въ одно заключается въ перемѣстительномъ свойствѣ умноженія, по которому произведеніе не мѣняется отъ перемѣны мѣстъ множимаго и множителя. Въ такомъ же положеніи находится и сложеніе (2-хъ слагаемыхъ); этому дѣйствію также можно указать два обратныя дѣйствія: одно—нахожденіе неизвѣстнаго числа (1-го слагаемаго), къ которому надо прибавить данное число (2-е слагаемое), чтобы получить данную сумму; другое—нахожденіе неизвѣстнаго числа (2-го слагаемаго), которое надо прибавить къ данному числу (къ 1-му слагаемому), чтобы получить данную сумму. Однако эти два дѣйствія рассматриваются, какъ одно, называемое вычитаніемъ, вслѣдствіе того, что сложеніе обладаетъ перемѣстительнымъ свойствомъ, по которому сумма не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ. Если бы это свойство принадлежало также и возвышенію въ степень, то тогда и два указанныхъ выше обратныя дѣйствія составляли бы въ сущности одно. Но возвышеніе въ степень не обладаетъ свойствомъ перемѣстительности; напр., 2^3 не равно 3^2 , 4^1 не равно 1^4 , 10^2 не равно 2^{10} , и т. д. Вслѣдствіе этого нахожденіе основанія по даннымъ показателю и степени (извлеченіе корня) существенно отличается отъ нахожденія показателя по даннымъ основанію и степени (нахожденіе логарифма).

Замѣтимъ, что послѣднее дѣйствіе въ элементарной алгебрѣ подробно не рассматривается; указываются главнымъ образомъ его практическія примѣненія.

298. Опредѣленіе логарифма. Логарифмомъ числа N по основанію a называется показатель степени, въ которую надо возвысить основаніе a , чтобы получить число N .

Такъ, если имѣемъ равенство $a^x=N$, то можно сказать, что x есть логарифмъ числа N по основанію a ; это можно выразить также такимъ обозначеніемъ:

$$x = \text{Log } N \text{ или } x = \log N,$$

гдѣ знаки Log и \log сокращенно обозначаютъ слово «логарифмъ». Иногда для обозначенія того, по какому основанію берется логарифмъ, внизу этихъ знаковъ ставятъ букву или число, означающее основаніе; напр., равенство $\text{Log}_a N = x$ означаетъ, что логарифмъ числа N по основанію a есть x .

Примѣры.

1°. Возьмемъ за основаніе число 4; тогда:

$$\begin{array}{lll} 4^2 = 16; & \text{поэтому} & \text{Log } 16 = 2; \\ 4^3 = 64; & > & \text{Log } 64 = 3; \\ 4^1 = 4; & > & \text{Log } 4 = 1; \\ 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2; & > & \text{Log } 2 = \frac{1}{2}; \\ 4^{-1} = \frac{1}{4}; & > & \text{Log } \frac{1}{4} = -1; \\ 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}. & > & \text{Log } \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \end{array}$$

2°. Если за основаніе возьмемъ число 10, то:

$$\begin{array}{lll} 10^1 = 10; & \text{поэтому} & \text{Log } 10 = 1; \\ 10^2 = 100; & > & \text{Log } 100 = 2; \\ 10^3 = 1000; & > & \text{Log } 1000 = 3; \\ 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1; & > & \text{Log } 0,1 = -1; \\ 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01; & \blacksquare & \text{Log } 0,01 = -2 \text{ и т. п.} \end{array}$$

3°. $\text{Log}_8 4096 = 4$, потому что $8^4 = 4096$.

4°. $\text{Log}_{64} 8 = \frac{1}{2}$, потому что $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$.

299 Нѣкоторыя свойства логарифмовъ. Основаніе a логарифмовъ мы будемъ всегда предполагать числомъ положительнымъ, не равнымъ 1¹⁾. Крімъ того,

¹⁾ Если $a=1$, то выраженіе a^x не можетъ дать никакого числа, кромѣ 1.

условимся еще въ слѣдующемъ. Если x есть дробь, то степень a^x представляетъ собою корень, котораго показатель равенъ знаменателю дроби. Корни, какъ мы видѣли (§ 246), имѣютъ нѣсколько значеній, изъ которыхъ только одно—арифметическое. Условимся, говоря о логарифмахъ, придавать степенямъ съ дробными показателями только арифметическое значеніе; при этомъ условіи степень a^x обладаетъ многими замѣчательными свойствами. Укажемъ тѣ изъ нихъ, которыми намъ придется пользоваться впоследствии. При этомъ для простоты мы ограничимся тѣмъ случаемъ, когда основаніе a логарифмовъ больше 1.

I. Всякое положительное число имѣетъ логарифмъ (соизмѣримый или несоизмѣримый) и притомъ единственный.

Ограничимся разъясненіемъ, что для всякаго положительнаго числа N , если оно не имѣетъ точнаго соизмѣримаго логарифма, можно найти два приближенныя соизмѣримыя значенія логарифма съ какою угодно степенью точности $\frac{1}{n}$, т.-е. что можно найти двѣ такія арифметическія

дроби $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$, при которыхъ (если $a > 1$) имѣетъ мѣсто двойное неравенство:

$$a^{\frac{k}{n}} < N < a^{\frac{k+1}{n}}.$$

Обозначивъ черезъ n какое-нибудь большое цѣлое число (напр., 1000), вообразимъ два неограниченныхъ ряда чиселъ:

$$a^0=1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, a^{\frac{3}{n}}, \dots, a^{\frac{k}{n}}, a^{\frac{k+1}{n}}, \dots \quad (1)$$

$$a^0=1, a^{-\frac{1}{n}}, a^{-\frac{2}{n}}, a^{-\frac{3}{n}}, \dots, a^{-\frac{k}{n}}, a^{-\frac{k+1}{n}}, \dots \quad (2)$$

Каждый изъ этихъ рядовъ представляетъ собою безконечную геометрическую прогрессию; въ первой прогрессіи знаменатель есть $a^{\frac{1}{n}}$, во второй $a^{-\frac{1}{n}}$. Такъ какъ, согласно предположенію, $a > 1$, то и $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1}$, т.-е. $a^{\frac{1}{n}} > 1$; поэтому прогрессія (1) есть

возрастающая. Но если $a^{\frac{1}{n}} > 1$, то $\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} < 1$, т. е. $a^{-\frac{1}{n}} < 1$; значить,

прогрессія (2) есть убывающая. По мѣрѣ удаленія отъ начала ряда (§ 296) члены прогрессіи (1), увеличиваясь, начиная отъ 1, могутъ сдѣлаться больше всякаго даннаго числа, а члены прогрессіи (2), уменьшаясь, начиная отъ 1, могутъ сдѣлаться меньше всякаго даннаго положительнаго числа. Изъ этого слѣдуетъ, что какъ бы велико или какъ бы мало ни было положительное число N , мы всегда встрѣтимъ въ нашихъ прогрессіяхъ (въ первой, если $N > 1$, и во второй, если $N < 1$), или членъ, который въ точности равняется числу N , или же два рядомъ стоящихъ члена, между которыми заключается N . Пусть окажется, что нѣкоторый членъ прогрессіи, напр., $a^{\frac{k}{n}}$, будетъ въ точности равенъ числу N ;

тогда дробь $\frac{k}{n}$ будетъ точнымъ логарифмомъ числа N . Если же этого не случится, то какіе-нибудь два рядомъ стоящихъ члена, напр., $a^{\frac{k}{n}}$ и $a^{\frac{k+1}{n}}$ будутъ удовлетворять двойному неравенству:

$$a^{\frac{k}{n}} < N < a^{\frac{k+1}{n}}$$

(если $N < 1$, то $a^{-\frac{k}{n}} > N > a^{-\frac{k+1}{n}}$); тогда числа $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$

(или $-\frac{k}{n}$ и $-\frac{k+1}{n}$) будутъ приближенными соизмѣримыми

значеніями $\text{Log } N$ съ точностью до $\frac{1}{n}$.

Конечно, вычисленіе членовъ указанныхъ прогрессіей съ цѣлью дѣйствительнаго нахождения приближеннаго логарифма даннаго числа N было бы крайне затруднительно; на практикѣ логарифмы вычисляются несравненно болѣе простыми приемами, указываемыми въ высшей математикѣ.

Если $a < 1$, то можно повторить все оказанное съ тою только разницею, что тогда прогрессія (1) будетъ убывающая, а прогрессія (2) возрастающая, и, слѣд., если $N > 1$, то подходящія къ N числа найдутся во второй прогрессіи, а если $N < 1$, то въ первой.

Вполнѣ аналогично тому, какъ это было сдѣлано нами раньше (§ 204)

для показанія существованія несоизмѣримаго $\sqrt[k]{A}$, мы можемъ и здѣсь разъяснить (пользуясь для наглядности числовой прямой), что существуетъ нѣкоторое неизмѣримое число a , которое больше всякаго соизмѣримаго числа вида $\frac{k}{n}$ и меньше всякаго соизмѣримаго числа вида $\frac{k+1}{n}$, если $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$ суть приближенные соизмѣримыя значенія $\text{Log } N$ съ точностью до $\frac{1}{n}$. Тогда степень a^a , согласно опредѣленію несоизмѣримыхъ показателей (§ 284), представляетъ собою такое число, которое (если $a > 1$) больше всякой степени вида $a^{\frac{k}{n}}$ и меньше всякой степени вида $a^{\frac{k+1}{n}}$; но такое число, согласно опредѣленію приближенныхъ значеній $\text{Log } N$, есть N ; значить, $a^a = N$, т.-е. $\text{Log } N = a$.

II. Бѣльшому логариому соответствуетъ бѣльшее число.

Дѣйствительно, при $a > 1$ прогрессія (1) есть возрастающая, а прогрессія (2) убывающая; изъ первой видно, что съ увеличеніемъ показателя при a члены возрастаютъ, а изъ второй—что съ уменьшеніемъ показателя¹⁾ члены убываютъ.

III. Логариомы чиселъ, бѣльшихъ единицы, положительны, а логариомы чиселъ, меньшихъ единицы, отрицательны.

Дѣйствительно, при $a > 1$ число N надо искать въ прогрессіи (1), когда оно больше 1, и въ прогрессіи (2), когда оно меньше 1; но показатели въ первой прогрессіи всѣ положительны, а во второй всѣ отрицательны; значить, когда $N > 1$, логариомъ этого числа долженъ быть положительный, а когда $N < 1$, то логариомъ его окажется отрицательнымъ.

IV. При увеличеніи логариома отъ 0 до $+\infty$ числа возрастаютъ отъ 1 до $+\infty$, а при уменьшеніи логариома отъ 0 до $-\infty$ числа уменьшаются отъ 1 до 0.

Дѣйствительно, при $a > 1$ изъ возрастающей прогрессіи (1) видно, что когда показатели (логариомы), оставаясь положительными, возрастаютъ отъ 0 безпредѣльно (отъ 0 до $+\infty$), числа, оставаясь положительными, возрастаютъ отъ 1 безпредѣльно (отъ 1 до $+\infty$); изъ убывающей прогрессіи (2) видно, что когда

¹⁾ Вспомнимъ, что отрицательныя числа считаются тѣмъ меньше, чѣмъ абсолютная величина ихъ больше.

показатели, оставаясь отрицательными, уменьшаются от 0 безпредѣльно (от 0 до $-\infty$), числа, оставаясь положительными, уменьшаются от 1 и могут быть сдѣланы менѣ всякаго даннаго положительнаго числа (уменьшаются от 1 до 0). Это свойство логарифмовъ можно выразить такими условными равенствами:

$$a^{+\infty} = +\infty, a^{-\infty} = 0,$$

или $\text{Log}(+\infty) = +\infty, \text{Log} 0 = -\infty.$

Замѣчаніе. При $a < 1$ свойства II, III и IV будутъ обратны указаннымъ, а именно: большому логарифму соответствуетъ меньшее число;

логарифмы чиселъ, большихъ единицы, отрицательны, а меньшихъ единицы положительны;

при увеличеніи логарифма отъ 0 до $+\infty$ числа убываютъ отъ 1 до 0, а при уменьшеніи логарифма отъ 0 до $-\infty$ числа возрастаютъ отъ 1 до $+\infty$.

V. Отрицательныя числа не имѣютъ логарифмовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ предыдущаго свойства логарифмовъ видно, что при измѣненіи логарифма отъ $-\infty$ до $+\infty$ числа измѣняются отъ 0 до $+\infty$; но между $-\infty$ и $+\infty$ заключаются, очевидно, всевозможныя логарифмы, тогда какъ между 0 и $+\infty$ содержатся числа только положительныя. Значитъ, нѣтъ такого логарифма, которому соответствовало бы какое-нибудь отрицательное число (вспомнимъ, что основаніе a мы всегда предполагаемъ числомъ положительнымъ).

VI. Логарифмъ самаго основанія равенъ 1, а логарифмъ единицы есть 0.

Это видно изъ равенствъ: $a^1 = a$ и $a^0 = 1$,

откуда: $\text{Log}_a a = 1, \text{Log}_a 1 = 0^1$.

300. Логарифмъ произведенія, частнаго, степени и корня. Логарифмы произведенія, частнаго, степени и корня находятся на основаніи слѣдующихъ 4-хъ теоремъ,

Теорема 1. Логарифмъ произведенія равенъ суммѣ логарифмовъ сомножителей.

¹⁾ Мы приняли безъ доказательства, что $a^0 = 1$, основываясь на значеніи нулевого показателя, при данномъ ему условно въ статьѣ о дѣленіи одинаковыхъ степеней одного и того же числа (§ 68). Но выраженіе a^0 можно разсматривать въ другомъ значеніи, а именно, какъ предѣлъ, къ которому стремится степень a^x по мѣрѣ приближенія x къ 0. Въ теоріи предѣловъ доказывается, что этотъ предѣлъ равенъ 1.

Д о к. Пусть N, N_1, N_2 будут какия-нибудь числа, имѣющія соответственно логариемы: x, x_1, x_2 по одному и тому же основанію a . По опредѣленію логарифма можемъ положить:

$$N = a^x, \quad N_1 = a^{x_1}, \quad N_2 = a^{x_2}.$$

Перемноживъ эти равенства, получимъ:

$$NN_1N_2 = a^x a^{x_1} a^{x_2} = a^{x+x_1+x_2},$$

откуда: $\text{Log}(NN_1N_2) = x + x_1 + x_2$;

но $x = \text{Log } N, \quad x_1 = \text{Log } N_1, \quad x_2 = \text{Log } N_2$;

поэтому $\text{Log}(NN_1N_2) = \text{Log } N + \text{Log } N_1 + \text{Log } N_2$.

Очевидно, это рассужденіе вполнѣ применимо къ какому угодно числу сомножителей.

Теорема 2. Логарифмъ дроби равенъ логарифму числителя безъ логарифма знаменателя (другими словами: логарифмъ частнаго равенъ логарифму дѣляимаго безъ логарифма дѣлителя).

Д о к. Раздѣливъ почленно два равенства:

$$N = a^x, \quad N_1 = a^{x_1}$$

получимъ:

$$\frac{N}{N_1} = \frac{a^x}{a^{x_1}} = a^{x-x_1};$$

откуда: $\text{Log} \frac{N}{N_1} = x - x_1 = \text{Log } N - \text{Log } N_1$.

Отсюда видно, что логарифмъ правильной дроби, т.-е. такой, у которой числитель меньше знаменателя, есть число отрицательное.

Въ частности: $\text{Log} \frac{1}{N} = \text{Log } 1 - \text{Log } N = 0 - \text{Log } N = -\text{Log } N$.

Теорема 3. Логарифмъ степени равенъ логарифму возвышаемаго числа, умноженному на показателя степени.

Д о к. Если возвысимъ обѣ части равенства $N = a^x$ въ n -ую степень, то каково бы ни было число n (цѣлое или дробное, положительное или отрицательное), всегда:

$$N^n = (a^x)^n = a^{xn},$$

откуда: $\text{Log } N^n = xn = (\text{Log } N)n$.

Теорема 4. Логарифмъ корня равенъ логарифму под-коренного числа, дѣленному на показателя корня.

Эту теорему можно разсматривать, какъ слѣдствіе предыду-щей. Дѣйствительно:

$$\text{Log} \sqrt[n]{N} = \text{Log} N^{\frac{1}{n}} = (\text{Log} N) \cdot \frac{1}{n} = \frac{\text{Log} N}{n}.$$

301. Логарифмирование алгебраическаго выраженія. Логарифмировать данное алгебраическое выраженіе значитъ выразить логарифмъ его посредствомъ логарифмовъ отдѣльныхъ чиселъ, составляющихъ выраженіе. Это можно сдѣлать, пользуясь теоремами предыдущаго параграфа. Пусть, напр., требуется логарифмировать слѣдующее выраженіе, которое обозначимъ одною буквою N :

$$N = \frac{3a^2 \sqrt[3]{b \sqrt{x}}}{4m^3 \sqrt{y}}.$$

Замѣтивъ, что это выраженіе представляетъ собою дробь, пишемъ на основаніи теоремы 2-й:

$$\text{Log} N = \text{Log} (3a^2 \sqrt[3]{b \sqrt{x}}) - \text{Log} (4m^3 \sqrt{y}).$$

Затѣмъ, применяя теорему 1-ю, получимъ:

$$\text{Log} N = \text{Log} 3 + \text{Log} a^2 + \text{Log} \sqrt[3]{b \sqrt{x}} - \text{Log} 4 - \text{Log} m^3 - \text{Log} \sqrt[6]{y},$$

и далѣе, по теоремѣ 3-ей и 4-й:

$$\begin{aligned} \text{Log} N &= \text{Log} 3 + 2 \text{Log} a + \frac{1}{2} \text{Log} (b \sqrt{x}) - \text{Log} 4 - 3 \text{Log} m - \frac{1}{6} \text{Log} y = \\ &= \text{Log} 3 + 2 \text{Log} a + \frac{1}{2} (\text{Log} b + \frac{1}{2} \text{Log} x) - \text{Log} 4 - 3 \text{Log} m - \frac{1}{6} \text{Log} y = \\ &= \text{Log} 3 + 2 \text{Log} a + \frac{1}{2} \text{Log} b + \frac{1}{4} \text{Log} x - \text{Log} 4 - 3 \text{Log} m - \frac{1}{6} \text{Log} y. \end{aligned}$$

Замѣтимъ, что логарифмировать можно только такія выраженія, которыя представляютъ собою произведеніе, частное, степень или корень, но не сумму и не разность. Поэтому, когда желаютъ логарифмировать сумму или разность, то, если воз-можно, предварительно приводятъ ихъ къ виду, у д о б н о м у

для логарифмированія, напр., преобразуя ихъ въ произведеніе; такъ:

$$\text{Log}(a^2-b^2)=\text{Log}[(a+b)(a-b)]=\text{Log}(a+b)+\text{Log}(a-b);$$

$$\begin{aligned} \text{Log}(a^2+2a+1-b^2) &= \text{Log}[(a+1)^2-b^2]=\text{Log}[(a+1+b)(a+1-b)] = \\ &= \text{Log}(a+1+b)+\text{Log}(a+1-b). \end{aligned}$$

Умѣя логарифмировать алгебраическія выраженія, мы можемъ, обратно, по данному результату логарифмированія найти выраженіе x , которое при логарифмированіи дало этотъ результатъ; такъ, если

$$\text{Log } x = \text{Log } a + \text{Log } b - 3 \text{Log } c - \frac{1}{2} \text{Log } d,$$

то на основаніи тѣхъ же теоремъ не трудно пайти, что искомое выраженіе будетъ

$$x = \frac{ab}{c^3 \sqrt{d}}.$$

302. Система логарифмовъ. Системою логарифмовъ наз. совокупность логарифмовъ, вычисленныхъ по одному и тому же основанію, для всѣхъ чиселъ натурального ряда, пачиная съ 1 и кончая какимъ-нибудь большимъ числомъ. Употребительны двѣ системы: система натуральныхъ логарифмовъ и система десятичныхъ логарифмовъ. Въ первой, по нѣкоторымъ причинамъ (которыя уясняются только въ высшей математикѣ) за основаніе взято несоизмѣримое число 2,718281828... (обозначаемое обыкновенно буквою e); во второй за основаніе принято число 10. Логарифмы первой системы обладаютъ многими теоретическими достоинствами; логарифмы второй системы, называемые иначе обыкновенными, весьма удобны для практическихъ цѣлей ¹⁾.

¹⁾ Натуральные логарифмы называются также Неперовыми по имени изобрѣтателя логарифмовъ, шотландскаго математика Непера (1550—1617), а десятичные логарифмы—Бригговыми, по имени профессора Бригга (современника и друга Непера), впервые составившаго таблицы этихъ логарифмовъ. Должно однако замѣтить, что Неперовы логарифмы не тождественны натуральнымъ, а только связаны съ ними нѣкоторымъ соотношеніемъ. Впервые натуральные логарифмы были введены послѣ смерти Непера, въ 1619 г., учителемъ математики въ Лондонѣ, Джономъ

303. Переходъ отъ одной системы логарифмовъ къ другой. Имѣя логарифмы чиселъ, вычисленные по одному какому-нибудь основанію a , мы легко можемъ найти логарифмы, вычисленные по новому основанію b . Пусть N какое-нибудь число и

$$\text{Log}_a N = x, \text{Log}_b N = y,$$

т.-е. $N = a^x$ и $N = b^y,$

откуда: $a^x = b^y.$

Логарифмируемъ это равенство по основанію a :

$$x = y \text{Log}_a b, \text{откуда: } y = x \cdot \frac{1}{\text{Log}_a b}.$$

Такимъ образомъ, чтобы получить новый логарифмъ, достаточно прежній логарифмъ умножить на число, равное 1, дѣленной на логарифмъ новаго основанія, взятый по старому основанію; такое число наз модулемъ новой системы относительно старой. Для перехода отъ десятичныхъ логарифмовъ къ натуральнымъ модуль оказывается 2,302585!.., а для обратнаго перехода отъ натуральныхъ логарифмовъ къ десятичнымъ модуль есть 0,4342945..

304. Значеніе логарифмическихъ таблицъ. Имѣя таблицы, въ которыхъ помѣщены логарифмы цѣлыхъ чиселъ по одному и тому же основанію, отъ 1 до какого-нибудь большого числа, мы можемъ производить надъ числами дѣйствія умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня проще, чѣмъ обыкновеннымъ путемъ. Предположимъ, напримѣръ, что надо вычислить $\sqrt[3]{ABC}$, гдѣ A , B и C суть данныя цѣлыя числа. Въмѣсто того, чтобы производить умноженіе и затѣмъ извлеченіе кубическаго корня, мы можемъ, пользуясь таблицами логарифмовъ, найти сначала $\text{Log} \sqrt[3]{ABC}$, основываясь на разложеніи:

$$\text{Log} \sqrt[3]{ABC} = \frac{1}{3} (\text{Log} A + \text{Log} B + \text{Log} C).$$

Найдя въ таблицахъ отдѣльно $\text{Log} A$, $\text{Log} B$ и $\text{Log} C$, сложивъ

Спейдекемъ. Въ слѣдующемъ, 1620 году, швейцарецъ Бюрги опубликовалъ свои таблицы, составленныя имъ независимо отъ Непера.

Замѣтимъ, что въ 1914 году исполнилось трехсотлѣтіе изобрѣтенія логарифмовъ, такъ какъ таблицы Непера были имъ опубликованы въ 1614 году (подъ названіемъ: „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“).

ихъ и раздѣливъ сумму на 3, получимъ $\text{Log } \sqrt[3]{ABC}$. По этому логариѳу, пользуясь тѣми же таблицами, можемъ найти соотвѣтствующее число, точное или приближенное.

Такимъ образомъ, руководствуясь изложенными выше теоремами о логариѳѣ произведенія, частнаго, степени и корня, мы можемъ, помощью логариѳическихъ таблицъ, свести умноженіе на сложеніе, дѣленіе на вычитаніе, возвышеніе въ степень на умноженіе и извлеченіе корня на дѣленіе.

На практикѣ употребительны таблицы десятичныхъ логариѳмовъ; мы ихъ будемъ обозначать знакомъ Log , не проставляя внизу этого знака основаніе 10: оно будетъ подразумѣваться. Чтобы понять устройство и употребленіе этихъ таблицъ, предварительнаго рассмотримъ нѣкоторыя свойства десятичныхъ логариѳмовъ.

ГЛАВА IV.

Свойства десятичныхъ логариѳмовъ.

305. Эти свойства мы выразимъ слѣдующими 5-ю теоремами.

Теорема 1. Логариѳмъ цѣлаго числа, изображаемаго единицею съ однимъ или съ нѣсколькими нулями, есть цѣлое число, заключающее столько единицъ, сколько нулей въ числѣ.

Д о к . Такъ какъ $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, $10^4=10000\dots$

и вообще $10^m=10\underbrace{\dots 00}_{m \text{ нулей}}$,

то $\text{Log } 10=1$, $\text{Log } 100=2$, $\text{Log } 1000=3$, $\text{Log } 10000=4$

и вообще $\text{Log } 100\underbrace{\dots 00}_{m \text{ нулей}}=m$.

Теорема 2. Логариѳмъ цѣлаго числа, не изображаемаго единицею съ нулями, не можетъ быть выраженъ точно ни цѣлымъ числомъ, ни дробнымъ.

Д о к . Пусть N есть такое цѣлое число, которое не выражается 1-ю съ нулями, и допустимъ, что $\text{Log } N$ въ точности равняется

какому-нибудь соизмѣримому числу, напр., дроби $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q цѣлыя числа. Въ такомъ случаѣ

$$10^{\frac{p}{q}} = N; \text{ слѣд., } \left(10^{\frac{p}{q}}\right)^q = N^q, \text{ т.-е. } 10^p = N^q.$$

Но такое равенство невозможно, потому что число 10^p разлагается только на множители 2 и 5, повторенныхъ p разъ, а число N^q не можетъ дать такого разложенія (потому что N не есть 1 съ нулями); поэтому невозможно допущеніе, что $\text{Log } N$ выражается точно.

Характеристика и мантисса. Логариемъ цѣлаго числа, которое не есть 1 съ нулями, при помощи соизмѣримыхъ чиселъ можетъ быть выраженъ только приближенно. Обыкновенно выражаютъ его въ видѣ десятичной дроби съ 5 или 7 десятичными знаками. Цѣлое число логариема наз. его **характеристикой**, а дробная десятичная часть—**мантиссой**.

Теорема 3. Характеристика логариема цѣлаго числа или цѣлаго числа съ дробью содержитъ столько единицъ, сколько въ цѣлой части числа находится цифръ безъ одной.

До к. Пусть, напр., имѣемъ число 5683,7.

Такъ какъ $10000 > 5683,7 > 1000$,

то $\text{Log } 10000 > \text{Log } 5683,7 > \text{Log } 1000$,

т.-е. $4 > \text{Log } 5683,7 > 3$;

значить: $\text{Log } 5683,7 = 3$ +полож. прав. дробь,

т.-е. **характеристика $\text{Log } 5683,7 = 3$.**

Пусть вообще число N въ цѣлой своей части содержитъ m цифръ; тогда

$$10^m > N > 10^{m-1},$$

слѣд., $\text{Log } (10^m) > \text{Log } N > \text{Log } 10^{m-1}$;

откуда: $m > \text{Log } N > m-1$;

значить: $\text{Log } N = (m-1)$ +полож. прав. дробь,

т.-е. **характ. $\text{Log } N = m-1$.**

Примѣры. 1) **характ. $\text{Log } 7,3 = 0$** ; 2) **характер. $\text{Log } 28\frac{3}{4} = 1$** ; 3) **характ. $\text{Log } 4569372 = 6$, и т. п**

306. Преобразование отрицательного логарифма. Прежде, чѣмъ излагать теоремы 4-ю и 5-ю, сдѣлаемъ слѣдующее разъясненіе. Мы видѣли (§ 300, теор. 2), что логарифмъ правильной дроби есть число отрицательное; значить, онъ состоитъ изъ отрицательной характеристики и отрицательной мантиссы (напр., $-2,08734$). Отрицательный логарифмъ всегда можно преобразовать такъ, что у него мантисса будетъ положительной, а отрицательной останется только одна характеристика. Для этого достаточно прибавить къ его мантиссѣ положительную единицу, а къ характеристикѣ отрицательную (отъ чего, конечно, величина логарифма не измѣнится). Если, напр., мы имѣемъ отрицательный логарифмъ $-2,08734$, то можно написать:

$$\begin{aligned} -2,08734 &= -2 \overset{-1}{1} + 1 - 0,08734 = -(2+1) + (1-0,08734) = \\ &= -3 + 0,91266 \end{aligned}$$

или сокращенно: $-2,08734 = -2,08734 = 3,91266^1$.

Для указанія того, что у логарифма отрицательна только одна характеристика, ставятъ надъ ней минусъ; такъ, вмѣсто того, чтобы написать: $-3 + 0,91266$, пишутъ короче: $3,91266$.

Очевидно, что при такомъ преобразованіи абсолютная величина характеристики увеличивается на 1, а вмѣсто данной мантиссы берется ея дополненіе до 1 (т.-е. такое число, которое получается отъ вычитанія данной мантиссы изъ 1). Это дополненіе получится, если послѣднюю значащую цифру данной мантиссы вычтемъ изъ 10, а всѣ остальные изъ 9. Замѣтивъ это, можемъ прямо писать:

$$-2,56248 = 3,43752, \quad -0,00830 = 1,99170, \text{ и т. п.}$$

На практикѣ логарифмы чиселъ, меньшихъ 1, всегда представляютъ такъ, чтобы у нихъ мантиссы были положительны.

Обратно, всякій логарифмъ съ отрицательной характеристикой и положительной мантиссой можно превратить въ отри-

¹⁾ Такое число произносятъ такъ: 3 съ минусомъ, 91266 столбчатыхъ.

цательный. Для этого достаточно къ положительной мантиссѣ приложить отрицательную единицу, а къ отрицательной характеристикѣ положительную; такъ, очевидно, можно написать:

$$7,83026 = -7 + 0,83026 = -7 + 1 - 1 + 0,83026 = (-7 + 1) - \\ - (1 - 0,83026) = -6 - 0,16974 = -6,16974$$

+1-1

или сокращенно: $7,83026 = 7,83026 = -6,16974$ ¹⁾.

Очевидно, что при такомъ преобразованіи абсолютная величина характеристики уменьшается на 1, а вмѣсто данной мантиссы берется ее дополнение 1. Заменявъ это, можемъ прямо писать:

$$3,57401 = -2,42599; 1,70830 = -0,29170; \text{ и т. п.}$$

307. Теорема 4. Отъ умноженія или дѣленія числа на 10^n (n цѣлое число) положительная мантисса логарифма остается безъ измѣненія, а характеристика увеличивается или уменьшается на n единицъ.

До к. Такъ какъ

$$\text{Log}(N \cdot 10^n) = \text{Log } N + \text{Log } 10^n, \quad \text{Log} \frac{N}{10^n} = \text{Log } N - \text{Log } 10^n$$

и $\text{Log } 10^n = n,$

то $\text{Log}(N \cdot 10^n) = \text{Log } N + n, \quad \text{Log} \frac{N}{10^n} = \text{Log } N - n.$

Такъ какъ n есть цѣлое число, то прибавленіе n не измѣняетъ мантиссы, а только увеличиваетъ характеристику на n единицъ; съ другой стороны, если условимся въ томъ случаѣ, когда дужко

¹⁾ Замѣчаніе для памяти. Для выполненія преобразованій, указанныхъ въ двухъ послѣднихъ параграфахъ, придется прибавлять $+1$ и -1 одно изъ этихъ чиселъ къ характеристикѣ, а другое къ мантиссѣ. Чтобы не ошибиться, къ чему прибавить $+1$ и къ чему -1 , полезно всегда обращать вниманіе на мантиссу заданнаго логарифма и рассуждать такъ: пусть въ заданномъ логарифмѣ мантисса отрицательна, а надо ее сдѣлать положительной; тогда къ ней, конечно, слѣдуетъ прибавить $+1$, а потому къ характеристикѣ надо прибавить -1 ; пусть въ заданномъ логарифмѣ мантисса будетъ положительна, а надо ее сдѣлать отрицательной (весь логарифмъ долженъ быть отрицательный); тогда къ ней слѣдуетъ добавить -1 , а слѣдовательно, къ характеристикѣ $+1$.

отъ логарифма отнять цѣлое число, отнимать его отъ характеристики, оставляя мантиссу всегда положительной, то вычитаніе n также не измѣняетъ мантиссы, а только уменьшаетъ характеристику на n единицъ.

Слѣдствія. 1) Положительная мантисса логарифма десятичнаго числа не измѣняется отъ перенесенія въ числѣ запятой, потому что перенесеніе запятой равносильно умноженію или дѣленію на цѣлую степень 10-ти. Такимъ образомъ, логарифмы чиселъ:

$$0,00423, 0,0423, 0,423, 4,23, 42,3, 423$$

отличаются только характеристиками, но не мантиссами, при условіи, что мантиссы положительны.

2) Мантиссы чиселъ, имѣющихъ одну и ту же значащую часть, но отличающихся только нулями на концѣ, одинаковы; такъ, логарифмы чиселъ: 23, 230, 2300, 23000 отличаются только характеристиками.

Теорема 5. 1) Когда десятичная дробь выражается 1-ею съ предшествующими нулями (0,1; 0,01; 0,001; и т. д.), то логарифмъ ея равенъ цѣлому отрицательному числу, содержащему столько отрицательныхъ единицъ, сколько есть нулей въ изображеніи десятичной дроби, считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ.

2) Логарифмъ всякой другой правильной десятичной дроби, если его мантисса едѣлана положительной, содержитъ въ характеристикѣ столько отрицательныхъ единицъ, сколько есть нулей въ изображеніи десятичной дроби передъ первой значащей цифрой, считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ.

Доказательство. 1) Такъ какъ

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}, \quad 0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}, \quad 0,001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}, \dots$$

$$\text{и вообще} \quad \overbrace{0,00\dots01}^{m \text{ нулей}} = \frac{1}{\underbrace{100\dots0}_{m \text{ нулей}}} = \frac{1}{10^m} = 10^{-m},$$

$$\text{то} \quad \text{Log } 0,1 = -1, \quad \text{Log } 0,01 = -2, \quad \text{Log } 0,001 = -3, \dots$$

и вообще $\text{Log } \overbrace{0,00\dots 01}^{m \text{ нулей}} = -m.$

2) Пусть имѣемъ десятичную дробь $A = \overbrace{0,00\dots 0\alpha\beta\dots}^{m \text{ нулей}}$, у которой передъ первой значащей цифрой стоятъ m нулей, считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ ($\alpha, \beta\dots$ суть какія-нибудь значащія цифры). Тогда очевидно, что

$$\overbrace{0,00\dots 01}^{m-1 \text{ нулей}} > \overbrace{0,00\dots 0\alpha\beta\dots}^{m \text{ нулей}} > \overbrace{0,00\dots 01}^{m \text{ нулей}}.$$

Слѣд.: $\text{Log } \overbrace{0,00\dots 01}^{m-1 \text{ нулей}} > \text{Log } A > \text{Log } \overbrace{0,00\dots 01}^{m \text{ нулей}}.$

Откуда: $-(m-1) > \text{Log } A > -m;$

значить: $\text{Log } A = -m + \text{полож. правильн. дробь,}$
т-е. х а р а к т. $\text{Log } A = -m$ (при полож. мантиссѣ).

Примѣры. 1) х а р а к т. $\text{Log } 0,25 = -1$; 2) х а р а к т. $\text{Log } 0,0000487 = -5$; и т. п.

308. Замѣчаніе. Изъ изложенныхъ теоремъ слѣдуетъ, что характеристику логарифма цѣлаго числа и десятичной дроби мы можемъ находить безъ помощи таблицъ; вслѣдствіе этого въ логарифмическихъ таблицахъ помѣщаются только однѣ мантиссы; кромѣ того, такъ какъ нахожденіе логарифмовъ дробей сводится къ нахожденію логарифмовъ цѣлыхъ чиселъ (логарифмъ дроби = логарифму числителя безъ логарифма знаменателя), то въ таблицахъ помѣщаются мантиссы логарифмовъ только цѣлыхъ чиселъ.

ГЛАВА V.

Устройство и употребленіе таблицъ.

309. Устройство таблицъ. Опишемъ вкратцѣ устройство и употребленіе пятизначныхъ таблицъ, изданныхъ П р ж е з а л ь с к и м ъ. Эти таблицы содержатъ мантиссы логарифмовъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 10009, вычисленные съ 5 десятичными знаками, при чемъ послѣдній изъ этихъ знаковъ

увеличенъ на 1 во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда 6-й десятичный знакъ долженъ бы оказаться 5 или болѣе 5; слѣд., пятизначныя таблицы даютъ приближенныя мантиссы съ точностью до $\frac{1}{2}$ стотысячной доли (съ недостаткомъ или съ избыткомъ ¹⁾).

На первой страницѣ помѣщены числа отъ 1 до 100 въ столбцахъ съ надписью *N* (*n i t e r s* — число). Противъ каждаго числа, въ столбцахъ съ надписью *Log.*, находятся мантиссы, вычисленныя съ 5 десятичными знаками.

Слѣдующія страницы устроены иначе. Въ первомъ столбцѣ, подъ рубрикою *N*, помѣщены числа отъ 100 до 1000, а рядомъ съ ними въ столбцѣ, надъ которымъ стоитъ цифра 0, находятся соответствующія мантиссы: первая двѣ цифры мантиссы, общія нѣсколькимъ логарифмамъ, написаны только разъ, а остальные три цифры помѣщены рядомъ съ числомъ, находящимся въ столбцѣ *N*. Эти же мантиссы принадлежатъ числамъ, которыя получаются, если къ числамъ, стоящимъ подъ рубрикою *N*, приписать справа 0. Такъ, мантисса логар. 5690 будетъ та же, что и у числа 569, т.-е. 75511 (стр. 17). Слѣдующіе столбцы съ надписями надъ ними 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, служатъ для нахождения логарифмовъ четырехзначныхъ чиселъ (и пятизначныхъ до 10009), оканчивающихся на эти значащія цифры, при чемъ первыя три цифры каждаго изъ этихъ чиселъ помѣщены въ столбцѣ *N*, а послѣднюю надо искать наверху, въ ряду цифръ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, и 9. Напр., чтобы найти мантиссу логарифма числа 5673, надо отыскать въ столбцѣ *N* число 567 (стр. 17) и наверху цифру 3; въ пересѣченіи горизонтальной линіи, идущей отъ 567, съ вертикальной линіей, опущенной отъ цифры 3, находятся три послѣднія цифры мантиссы (381), первыя же

¹⁾ Въ нѣкоторыхъ таблицахъ (напр. „Чихановъ—Таблицы пятизначныхъ логарифмовъ“) мантиссы, взятыя съ избыткомъ, отмѣнены черточкой, поставленной подъ послѣдней цифрой мантиссы

Для рѣшенія большинства практичeskихъ задачъ вполне достаточно пользоваться четырьмязначными таблицами (напр., таблицами, составленными В. И. Лорченко и Н. В. Оглоблинымъ, Киевъ, 1910 г.). Въ случаяхъ, требующихъ очень большой точности, пользуются иногда семизначными таблицами (напр., Логарифмически-тригонометрическое руководство барона Георга Вега). Способъ пользованія такими таблицами объясненъ во введеніи къ таблицамъ.

ея цифры надо искать въ столбцѣ подѣ цифрою 0, на одной горизонтальной линіи, или выше; такъ, для числа 5673 первыя двѣ цифры мантиссы будутъ 75, а послѣднія 381, такъ что всѣ 5 знаковъ будутъ 75381. Если передъ послѣдними тремя цифрами мантиссы стоитъ въ таблицахъ звездочка, то это значить, что первыя двѣ цифры надо брать н и ж е горизонтальной линіи, на которой расположены послѣднія цифры мантиссы. Такъ, для числа 5758 мантисса будетъ 76027 (стр. 17).

310. По данному десятичному числу найти логарифмъ. Характеристику логарифма цѣлаго числа или десятичной дроби мы выставляемъ непосредственно, руководствуясь указанными нами свойствами десятичныхъ логарифмовъ.

При пахожденіи мантиссы мы примемъ во вниманіе, что положеніе запятой въ десятичномъ числѣ, а также и число нулей на концѣ цѣлаго числа, не оказываютъ вліянія на мантиссу (§ 307, слѣдствія); поэтому мы можемъ отбросить запятую въ десятичной дроби и въ цѣломъ числѣ зачеркнуть всѣ нули, если они есть на концѣ числа. Тогда могутъ представиться слѣдующіе 2 случая.

1°. Цѣлое число не превосходитъ 10009. Тогда мантисса паходится прямо изъ таблицъ. Приведемъ примѣры:

$$\begin{aligned} \text{Log } 82 &= 1,91381; & \text{Log } 0,082 &= \bar{2},91381 \text{ (стр. 1);} \\ \text{Log } 2560 &= 3,40824; & \text{Log } 256000 &= 5,40824 \text{ (стр. 7);} \\ \text{Log } 7416 &= 3,87017; & \text{Log } 74,16 &= 1,87017 \text{ (стр. 23).} \end{aligned}$$

Въ этомъ случаѣ найденная мантисса будетъ точна до $\frac{1}{2}$ стотысячной доли.

2°. Цѣлое число превосходитъ 10009. Тогда мантисса паходится на основаніи слѣдующей истины, которую мы примемъ безъ доказательства:

если числа болѣе 1000, и разности между ними не превосходятъ 1, то безъ чувствительной ошибки можно принять, что раз-

ности между числами пропорциональны разностям между их логарифмами¹⁾.

Приравняв это, положимъ, что требуется найти логарифмъ числа 74,2354, которое, по отбрасываніи запятой, даетъ цѣлое число, превосходящее 10009.

Перенесемъ въ немъ запятую на столько знаковъ, чтобы въ цѣлой части образовалось наибольшее число, какое только можно найти въ таблицахъ; въ нашемъ примѣрѣ для этого достаточно перенести запятую вправо на два знака. Теперь будемъ искать

$$\text{Log } 7423,54 = ?$$

Выписываемъ изъ таблицъ (стр. 23) мантиссу логарифма числа 7423 и находимъ такъ называемую таблицную разность, т.-е. разность между взятой мантиссой и слѣдующей бѣльшей (соотвѣтствующей числу 7424). Для этого вычитаемъ (въ умѣ) изъ 064 (пять трехъ послѣднихъ цифръ мантиссы числа 7424) число 058 (три послѣднія цифры мантиссы числа 7423); находимъ 6 (стотысячн.). Значить:

$$\text{Log } 7423 = 3,87058;$$

$$\text{Log } 7424 = 3,87058 + 6 \text{ (стотыс.)}.$$

Обозначимъ буквою Δ то неизвѣстное число стотысячныхъ,

¹⁾ Справедливость этого предложенія до нѣкоторой степени можетъ быть проверена просмотромъ самихъ логарифмическихъ таблицъ. Въ этихъ таблицахъ, начиная со 2-й страницы помѣщены четырехзначныя цѣлыя числа въ ихъ натуральномъ порядкѣ, т.-е. числа эти возрастаютъ на 1. Если бы разности между числами были строго пропорциональны разностямъ между ихъ логарифмами, то, при возрастаніи чиселъ на 1, ихъ логарифмы возрастали бы на одно и то же число. Просматривая таблицы, замѣчаемъ, что разности между сосѣдними мантиссами хотя и не остаются одинаковыми на протяженіи всѣхъ таблицъ, однако измѣняются очень медленно; напр., для всѣхъ чиселъ, помѣщенныхъ на страницахъ 19, 20, 21 и 22 таблицъ, разности между сосѣдними мантиссами оказываются только или 6 или 7 стотысячныхъ. Если же эти разности почти постоянны для чиселъ, отличающихся на 1 (и превосходящихъ 1000), то они должны быть еще болѣе постоянными для чиселъ, отличающихся менѣе, чѣмъ на 1 (и превосходящихъ 1000).

которое надо приложить къ $\text{Log } 7423$, чтобы получить $\text{Log } 7423,54$; тогда можем написать:

$$\text{Log } 7423,54 = 3,87058 + \Delta \text{ (стотыс.)}$$

Изъ этихъ равенствъ мы видимъ, что если число 7423 увеличится на 1, то логарифмъ его увеличится на 6 (стотыс.), а если то же число увеличится на 0,54, то логарифмъ его увеличится на Δ (стотыс.).

На основаніи указанной выше пропорціональности можем написать пропорцію:

$$\Delta : 6 = 0,54 : 1; \text{ откуда: } \Delta = 6 \cdot 0,54 = 3,24 \text{ (стотыс.)}$$

Приложивъ къ 3,87058 найденную разность, мы найдемъ $\text{Log } 7423,54$. Такъ какъ мы ограничиваемся 5-ю десятичными знаками мантиссы, то въ числѣ 3,24 можемъ отбросить цифры 2 и 4, представляющія собою миллионныя и десятимилліонныя доли; при этомъ, для уменьшенія ошибки, будемъ всегда руководствоваться слѣдующимъ правиломъ: если отбрасываемая часть больше (или равна) 5 миллионныхъ, то, отбрасывая ее, мы увеличимъ на 1 оставшееся число стотысячныхъ; въ противномъ же случаѣ оставимъ число стотысячныхъ безъ измѣненія. Такимъ образомъ:

$$\text{Log } 7423,54 = 3,87058 + 3 \text{ стотыс.} = 3,87061.$$

Такъ какъ $\text{Log } 74,2354$ долженъ имѣть ту же самую мантиссу, а характеристика его должна быть 1, то

$$\text{Log } 74,2354 = 1,87061.$$

Правило. Чтобы найти мантиссу даннаго цѣлаго числа, имѣющаго 5 или болѣе цифръ, выписываютъ изъ таблицъ мантиссу числа, составленнаго первыми 4 цифрами даннаго числа, и къ ней прибавляютъ произведеніе табличной разности на десятичную дробь, образованную остальными цифрами даннаго числа, при чемъ вмѣсто точной величины этого произведенія берутъ ближайшее къ нему цѣлое число.

Для болѣе строгаго вывода этого правила повторимъ въ общемъ видѣ тѣ рассужденія, посредствомъ которыхъ выше мы нашли

$$\text{Log } 74,2354.$$

Переносемъ въ данномъ десятичномъ числѣ запятую такъ, чтобы она стояла послѣ 4-й цифры слѣва; тогда число представится въ видѣ суммы $n+h$, въ которой n есть четырехзначное цѣлое число, а h десятичная дробь, меньшая 1. Найдемъ въ таблицахъ мантиссу M (стотыс.), соответствующую цѣлому числу n , и опредѣлимъ (вычитаниемъ въ умѣ) табличную разность d между взятой мантиссой M и слѣдующей большей мантиссой (соответствующей числу $n+1$). Тогда мы можемъ написать:

$$\text{Log } n = 3 + \frac{M}{10^4};$$

$$\text{Log } (n+1) = 3 + \frac{M+d}{10^4}.$$

Обозначимъ буквою Δ неизвѣстное число стотысячныхъ, которое надо приложить къ $\text{Log } n$, чтобы получить $\text{Log } (n+h)$; тогда:

$$\text{Log } (n+h) = 3 + \frac{M+\Delta}{10^4}.$$

Изъ написанныхъ 3-хъ равенствъ заключаемъ, что если число n увеличится на 1, то логарифмъ его увеличится на d (стотыс.), а если то же число n увеличится на h , то логарифмъ его увеличится на Δ (стотыс.). На основаніи нашего допущенія пропорциональности мы можемъ написать:

$$\Delta : d = h : 1; \text{ откуда: } \Delta = dh \text{ (стотыс.)}$$

$$\text{Значитъ: } \text{Log } (n+h) = 3 + \frac{M+dh}{10^4} \quad [1]$$

Произведеніе dh рѣдко есть цѣлое число; болѣею частью оно есть цѣлое число съ дробью. Въ этомъ случаѣ, довольствуясь 5-ю десятичными знаками мантиссы, мы вмѣсто точной величины произведенія dh условимся брать ближайшее къ нему цѣлое число (хотя бы оно было и болѣе dh). Обозначивъ это ближайшее цѣлое число буквою ε , мы можемъ приближенный логарифмъ выразить такъ:

$$\text{Log } (n+h) = 3 + \frac{M+\varepsilon}{10^4} \quad [2]$$

Остается теперь, если нужно, замѣнить характеристику 3 другимъ числомъ сообразно теоремамъ о характеристикахъ (3-я теор. § 305 и 5-я теор. § 307).

311. Употребленіе пропорціональныхъ частей при нахожденіи логарифма. Произведеніе табличной разности на десятичную дробь, о которомъ говорится въ пре-

дыдущемъ правилѣ, можно производить весьма просто при помощи такъ называемыхъ *partes proportionales* (пропорціональныхъ частей), помѣщенныхъ въ таблицѣхъ въ крайнемъ правомъ столбцѣ съ надписью *P. P.* Такъ, на стран. 23-й мы находимъ въ этомъ столбцѣ двѣ колонки, надъ которыми стоятъ цифры: надъ одной 6, надъ другой 5. Эти цифры означаютъ табличныя разности (въ сотысячныхъ доляхъ) между двумя рядомъ стоящими мантиссами, помѣщенными на этой страницѣ. Подъ каждой изъ этихъ табличныхъ разностей выписаны произведенія ея на 0,1, на 0,2, на 0,3..., наконецъ, на 0,9. Такъ, найдя въ колонкѣ, надъ которою стоитъ разность 6, съ лѣвой стороны цифру 8, означающую 0,8, и взявъ справа отъ этой цифры число 4,8, мы получимъ произведение 6 . 0,8.

Чтобы при помощи этихъ *P. P.* умножить, положимъ, 6 на 0,54, достаточно пайти въ колонкѣ произведение 6 . 0,5 и потомъ произведение 6 . 0,04. Первое находимъ прямо: оно равно 3,0; чтобы получить второе, примемъ во вниманіе, что произведение 6 . 0,04 въ 10 разъ меньше произведенія 6 . 0,4; это послѣднее находимъ въ *P. P.*; оно равно 2,4; слѣд., $6 \cdot 0,04 = 0,24$. Сложивъ 3,0 и 0,24, найдемъ полное произведение 6 . 0,54.

Вычисленіе всего удобнѣе располагать такъ:

Число.	Логарифмъ.	
7423.	8,87058	$d=6$
5	30	
4	24	
7423 54	8,87061; "	
Log 74,2354	=1,87061.	

Подъ числомъ 7423 мы подписали цифру 5, отступивъ на одно мѣсто вправо, потому что эта цифра означаетъ 0,5; точно такъ же цифра 4 отодвинута еще на одно мѣсто вправо, такъ какъ она означаетъ 0,04. Подъ мантиссой 87058 подписаны числа 30 и 24, при чемъ каждое изъ нихъ отодвинуто на одно мѣсто вправо, такъ какъ 30 означаетъ 3,0 сотысячныхъ, а 24 означаетъ 0,24 сотысячныхъ. Направо помѣщена табличная разность 6 (обыкновенно она обозначается буквою *d*).

Приведемъ еще примѣръ: пайти $\text{Log } 28739,06$.

Число.	Логарифмъ.	$d=15$
2873.	3,45834	
9	135	
0	0	
6	90	
2873,906 3,45848;		
Log 28739,06 4,45848.		

Складывая 4 и 3 (стотыс.), мы увеличили сумму на 1, такъ какъ первая изъ отбрасываемыхъ цифръ (милліонныхъ) есть 5.

311,а. Предѣлъ погрѣшности приближеннаго логарифма. Сначала мы опредѣлимъ погрѣшность приближеннаго логарифма [1] (§ 310), въ которомъ произведение dh берется точнымъ, а затѣмъ найдемъ погрѣшность приближенія [2], въ которомъ вмѣсто точной величины dh взято ближайшее цѣлое число; при этомъ мы предположимъ, что число $n+h$, логарифмъ котораго требуется пайти, есть число точное.

Погрѣшность приближенія [1] обуславливается 2-мя причинами:

- 1) допущенная нами истина о пропорціональности разностей между числами разностямъ соответствующихъ логарифмовъ не вполне вѣрна;
- 2) въ таблицахъ помѣщены не точныя мантиссы, а приближенныя (съ точностью до $\frac{1}{2}$ стотысячной доли)

Погрѣшность, происходящая отъ 1-й причины, оказывается, по изслѣдованію ея ^{*)}, настолько ничтожной, что она вообще не вліяетъ на 5-й десятичный знакъ мантиссы; поэтому въ дальнѣйшемъ мы на нее не будемъ обращать вниманія. Чтобы судить о величинѣ погрѣшности, происходящей отъ 2-й причины, мы составимъ выраженіе для точнаго логарифма числа $n+h$, а затѣмъ сравнимъ его съ приближеннымъ логарифмомъ [1].

Обозначимъ буквами a и a' положительныя или отрицательныя числа стотысячныхъ долей, которыя надо приложить: первое—къ табличной мантиссѣ $\text{Log } n$, а второе—къ табличной мантиссѣ $\text{Log } (n+1)$, чтобы получить точныя мантиссы этихъ чиселъ. Тогда мы можемъ написать слѣдующія точныя равенства:

$$\text{Log } n = 3 + \frac{M+a}{10^5}; \quad \text{Log } (n+1) = 3 + \frac{M+d+a'}{10^5};$$

гдѣ абсолютныя величины чиселъ a и a' должны быть меньше $\frac{1}{2}$. Изъ этихъ равенствъ видно, что когда число n увеличивается на 1, тогда точный логарифмъ его увеличивается на $d+a'-a$ (стотыс.); значитъ, когда

^{*)} См. въ концѣ книги „Приложеніе 2“ (стр. 447).

число и увеличивается на h , точный логарифмъ его долженъ увеличиться на такое число Δ (столец), которое удовлетворяетъ пропорціи:

$$\Delta \cdot (d + a' - a) = h : 1; \text{ откуда } \Delta = \frac{h}{(d + a' - a)}.$$

Слѣд., точная величина логарифма числа $n+h$ будетъ:

$$\text{Log } (n+h) = 3 + \frac{M+a}{10^5} + \frac{(d+a'-a)h}{10^5}.$$

Присея дробѣ къ одному знаменателю и сдѣлавъ перестановку членовъ въ числитель, мы можемъ найденное выраженіе представить такъ:

$$\text{Log } (n+h) = 3 + \frac{M+dh}{10^5} + \frac{\alpha + hx' - hx}{10^5}.$$

Сравнивая это выраженіе съ приближеніемъ [1] параграфа 310-го, находимъ, что погрѣшность этого приближенія равна:

$$\frac{\alpha + hx' - hx}{10^5} = \frac{\alpha(1-h) + hx'}{10^5}.$$

Такъ какъ абс. величины чиселъ α и α' меньше $\frac{1}{2}$, то эта погрѣшность, очевидно, меньше дробѣ:

$$\frac{\frac{1}{2}(1-h) + h \cdot \frac{1}{2}}{10^5} = \frac{\frac{1}{2}(1-h+h)}{10^5} = \frac{\frac{1}{2}}{10^5} = \frac{1}{2} \text{ стотысячной.}$$

Такое предѣль погрѣшности приближеннаго логарифма [1]. Переходя теперь отъ этого приближенія къ приближенному логарифму [2], т. е., замѣняя точную величину произведенія dh ближайшимъ къ нему цѣлымъ числомъ, мы дѣлаемъ еще ошибку, но меньшую $\frac{1}{2}$. Слѣд., предѣль погрѣшности приближеннаго логарифма [2] будетъ:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ (стотысяч.)}$$

Такимъ образомъ, если логарифмъ берется прямо изъ таблицъ, то предѣль его погрѣшности есть $\frac{1}{2}$ стотысячной доли (§ 310, 1°); если же логарифмъ получается посредствомъ указаннаго нами вычисленія, то предѣль погрѣшности оказывается больше, именно 1 стотысячная доля.

311, в. Случай, когда данное число неточное. Въ предыдущемъ параграфѣ мы предполагали, что сумма $n+h$ есть точное данное число. Но часто бываетъ, что требуется отыскать логарифмъ числа, заданнаго только приближенно (напр., требуется найти $\text{Log } \pi$, принимая за π приближенное его значеніе 3,142). Въ этомъ случаѣ къ погрѣшности приближеннаго логарифма, указанной нами въ §§ 310 (1°) и 311, а, прибавляется еще погрѣшность, происходящая отъ неточности самого числа. Опредѣлимъ предѣль это послѣдней погрѣшности.

Обозначимъ буквою φ погрѣшность приближеннаго числа $n+h$, т. е. то положительное или отрицательное число, которое надо приложить къ при-

ближнему числу $n+h$, чтобы получить точное число; при этом мы допустим, что φ настолько малая дробь, что сумма $n+h+\varphi$ остается, как и сумма $n+h$, заключенной между целыми числами n и $n+1$. Мы видели (§ 311, а), что если число n увеличивается на 1, то точный логарифм его увеличивается на $d+\alpha'-\alpha$ (стотысячных); значит, если число увеличится на φ , то логарифм его должен увеличиться на такое число Δ (стотыс.), которое удовлетворяет пропорции:

$$\Delta : (d + \alpha' - \alpha) = \varphi : 1; \text{ откуда: } \Delta = \varphi (d + \alpha' - \alpha) \text{ (стотыс.)}$$

Слѣд. $\text{Log } (n+h+\varphi) = \text{Log } (n+h) + \varphi(d+\alpha'-\alpha)$.

Значит, когда мы вместо $\text{Log } (n+h+\varphi)$ берем $\text{Log } (n+h)$, мы делаем ошибку, равную $\varphi(d+\alpha'-\alpha)$ стотысячных. Ошибка эта, очевидно, меньше

$$|\varphi| \left(d + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = |\varphi| (d+1) \text{ (стотысячных)},$$

гдѣ $|\varphi|$ есть абсолютная величина погрѣшности самого приближенного числа $n+h$ (или ее предѣла).

Конечно, къ этой погрѣшности надо приложить ту, которая происходитъ отъ неточности приближенного логарифма числа $n+h$, и предѣлъ которой, какъ мы видели, есть или $\frac{1}{2}$ стотысячной, или 1 стотысячная, смотря по тому, берется ли мантисса логарифма прямо изъ таблицъ, или вычисляется помощью пропорциональныхъ разностей.

Такимъ образомъ, предѣлъ окончательной погрѣшности будетъ:

$$\begin{aligned} & |\varphi| (d+1) + \frac{1}{2} \} \text{ стотысячныхъ.} \\ \text{или } & |\varphi| (d+1) + 1 \} \end{aligned}$$

Не должно забывать, что φ есть погрѣшность того числа $n+h$, которое получится, когда въ данномъ десятичномъ числѣ запятую поставимъ послѣ 4-й цифры слѣва.

Примѣръ Найти $\text{Log } \pi$, принимая $\pi = 3,142$ (съ точностью до $\frac{1}{2}$ тысяч.).

Перенеся запятую послѣ 4-й цифры слѣва, получимъ четырехзначное число 3142, точное до $\frac{1}{2}$ целой единицы (точное число должно было бы быть $3142+\varphi$, гдѣ $\varphi < \frac{1}{2}$). Изъ таблицъ находимъ:

$$\text{Log } 3142 = 3,49721; \quad d=13.$$

Предѣлъ погрѣшности этого логарифма, происходящей отъ неточности числа, равенъ:

$$|\varphi| (13+1) < \frac{1}{2} \quad 14=7 \text{ (стотыс.)}$$

Такъ какъ предѣлъ погрѣшности самого логарифма (взятаго непосредственно изъ таблицъ) есть $\frac{1}{2}$ стотысячной, то предѣлъ окончательной погрѣшности будетъ $7\frac{1}{2}$ стотыс. < 8 стотыс.

Такимъ образомъ:

$$\text{Log } (3142+\varphi) = 3,49721 \text{ (съ точн. до 8 ед. посл. разр.)}$$

Слѣд. $\text{Log } 3,142 = 0,49721$ (съ точн. до 8 ед. посл. разр.)

Значитъ, точная величина $\text{Log } \pi$ заключается:

$$0,49721 + 0,00008 > \text{Log } \pi > 0,49721 - 0,00008$$

т.-е.

$$0,49729 > \text{Log } \pi > 0,49713.$$

Семизначный логарифмъ числа π равенъ 0,4971499. Найденный нами приближенный логарифмъ 0,49721 разнится отъ этого на 0,0000601, что, действительно, меньше 0,00008.

312. По данному логарифму найти десятичное число. Пусть требуется найти $N \text{ Log } \bar{1},51001$, т.-е. найти число (Numerus), котораго логарифмъ равенъ $\bar{1},51001$ ¹⁾. Не обращая пока вниманія на характеристику, отыскиваемъ въ таблицахъ сначала первыя двѣ цифры мантиссы, а потомъ и остальные три. Оказывается, что въ таблицахъ есть мантисса 51001, соответствующая числу 3236. Принявъ во вниманіе характеристику, окончательно пишемъ:

$$\bar{1},51001 = \text{Log } 0,3236,$$

что можно также записать и такъ:

$$N \text{ Log } \bar{1},51001 = 0,3236.$$

Чаще случается, что данная мантисса не находится въ таблицахъ. Пусть напр., намъ данъ логарифмъ, у котораго мантисса есть 59499, не встрѣчающаяся въ таблицахъ, и какая-нибудь характеристика (напр., 2). Тогда искомое число можно найти простымъ вычисленіемъ, подобнымъ тому, которымъ мы находили логарифмъ числа, не помѣщающагося въ таблицахъ.

Предположимъ сначала, что характеристика данного логарифма есть 3, т.-е. что данный логарифмъ есть 3,59499. Беремъ изъ таблицъ мантиссу 59494, ближайшую меньшую къ данной, выписываемъ четырехзначное число 3935, соответствующее ей, и определяемъ (вычитаніемъ въ умѣ) таблицную разность 12 (стотыс.) между взятой мантиссой и слѣдующей большей (соответствующей числу 3936). Такимъ образомъ:

$$3,59494 = \text{Log } 3935;$$

$$3,59494 + 12 \text{ стотыс.} = \text{Log } 3936.$$

¹⁾ Фразу: „найти число, котораго логарифмъ равенъ a “ замѣняютъ иногда болѣе короткой: „найти антилогарифмъ a “. Значитъ, антилогарифмомъ a наз. число, котораго логарифмъ равенъ a ; его можно обозначать такъ: $N \text{ Log } a$ (или Numerus Log a).

Опредѣлимъ еще разность 5 (стотыс.) между данной мантиссой (59499) и мантиссой, взятой изъ таблицъ (59494) и обозначимъ буквою h ту неизвестную дробь, которую надо приложить къ числу 3935, чтобы логарифмъ его увеличился на 5 (стотыс.). Тогда

$$3,59494 + 5 \text{ стотыс.} = \text{Log} (3935 + h).$$

Изъ этихъ 3-хъ равенствъ усматриваемъ, что если логарифмъ увеличивается на 12 (стотыс.), то соответствующее число увеличивается на 1, а если логарифмъ увеличивается на 5 (стотыс.), то число увеличивается на h . На основаніи допущенной нами пропорціональности можемъ написать:

$$12 : 5 = 1 : h \quad \text{откуда: } h = \frac{5}{12} = 0,4\dots$$

Значитъ, число, соответствующее логарифму 3,59499, равно, $3935 + 0,4\dots = 3935,4\dots$; а такъ какъ характеристика данного логарифма есть 2, а не 3, то искомое число x равно $393,54\dots$, что можно выразить такъ:

$$x = N \text{Log } 2,59499 = 393,54\dots$$

Правило. Чтобы найти число по данному логарифму, сначала паходятъ въ таблицахъ ближайшую меньшую мантиссу и соответствующее ей четырехзначное число; затѣмъ къ этому числу прибавляютъ частное, выраженное десятичной дробью, от дѣленія разности между данной мантиссой и ближайшей меньшей на соответствующую табличную разность¹⁾; наконецъ, въ полученномъ числѣ ставятъ запятую сообразно характеристикѣ данного логарифма.

Для строгаго вывода этого правила повторимъ въ общемъ видѣ разсужденія, посредствомъ которыхъ по логарифму 2,59499 мы нашли соответствующее число.

¹⁾ Частное это достаточно вычислить съ точностью до $\frac{1}{4}$ десятой, такъ какъ бѣльшая точность все равно не достигается (см. § 312, а)

Положим сначала, что у данного логарифма характеристика есть 3 (и какая-нибудь мантисса, не находящаяся в таблицах). Находим в таблицах мантиссу M , меньшую данной мантиссы и ближайшую к ней, выписываем соответствующее этой мантиссе целое четырехзначное число n и находим (вычитаем в уме) табличную разность d (стотыс.) между взятой мантиссой M и следующей большей мантиссой (соответствующей числу $n+1$). Таким образом:

$$3 + \frac{M}{10^5} = \text{Log } n;$$

$$3 + \frac{M+d}{10^5} = \text{Log } (n+1).$$

Определим еще разность Δ (стотыс.) между данной мантиссой и взятой в таблицах мантиссой M и обозначим буквой h ту неизвестную дробь, которую надо приложить к числу n , чтобы логарифм его увеличился на Δ стотысячных. Тогда:

$$3 + \frac{M+\Delta}{10^5} = \text{Log } (n+h).$$

Из написанных 3-х равенств видно, что если логарифм увеличивается на d (стотыс.), то число увеличивается на 1; если же логарифм увеличивается на Δ (стотыс.), то число увеличивается на h .

На основании допущенной нами пропорциональности можем написать:

$$d : \Delta = 1 : h; \text{ откуда: } h = \frac{\Delta}{d}.$$

Слѣд., искомое число будетъ:

$$n+h = n + \frac{\Delta}{d}.$$

Остается обратить дробь $\frac{\Delta}{d}$ в десятичную, приписать ее к целому числу n и, если характеристика данного логарифма не 3, а какое-нибудь иное число, перенести запятую сообразно теоремам о характеристиках.

813. Употребление пропорциональных частей при нахождении числа. Обращение h в десятичную дробь может быть выполнено при помощи Р. Р. Такъ, когда $h = \frac{5}{12}$, то при дѣленіи 5 на 12 мы задаемся вопросомъ: на какое число десятыхъ надо умножить 12, чтобы получить 5 или число, ближайшее къ 5? Это число десятыхъ мы найдемъ въ колонкѣ, надъ которою стоитъ число 12; отыскиваемъ въ ней съ правой стороны число, ближайшее къ 5; это будетъ 4,8. Слева отъ 4,8 стоитъ цифра 4, которая представитъ собою число десятыхъ долей.

Вычисление всего удобнее располагать такъ:

Логарифмъ.	Число.	
3,59499		
. . . 94	3935	$d=12$
<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/>		
. . . 5	4	
<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/>		
3,59499	, . . 3935,4.	
2,59499 393,54.	

313,а. Предѣлъ погрѣшности числа, найденнаго по данному логарифму. Предварительно замѣтимъ, что данный логарифмъ, по которому требуется отыскать неизвѣстное число, только въ исключительныхъ случаяхъ есть логарифмъ точный; вообще же это есть логарифмъ приближенный (и погрѣшность его можетъ доходить до нѣсколькихъ стотысячныхъ долей, напр., тогда, когда этотъ логарифмъ полученъ отъ сложения нѣсколькихъ приближенныхъ логарифмовъ, или отъ умноженія приближеннаго логарифма на цѣлое число). Обозначимъ буквою ω то положительное или отрицательное число стотысячныхъ долей, которое надо приложить къ данной приближенной мантиссѣ $M + \Delta$, чтобы получить точную мантиссу $M + \Delta + \omega$. Допустимъ, что это число настолько невелико, что сумма $\Delta + \omega$ не превосходитъ табличной разности d ; тогда искомое число заключено между n и $n+1$ и, слѣд., оно есть сумма $n+h$, въ которой n есть четырехзначное число, взятое изъ таблицъ (мы предполагаемъ, что характеристика даннаго логарифма есть 3), а слагаемое h представляеть собою нѣкоторую правильную дробь, которую требуется найти. Точный логарифмъ числа $n+h$ мы можемъ выразить двояко: съ одной стороны это есть

$$\text{Log}(n+h) = 3 + \frac{M + \Delta + \omega}{10^5},$$

а съ другой стороны онъ равенъ.

$$\text{Log}(n+h) = 3 + \frac{M + hd + \gamma}{10^5},$$

гдѣ абс. величина числа γ должна быть меньше $\frac{1}{10}$, потому что, какъ мы видѣли (§ 311, а), если возьмемъ за приближенный логарифмъ числа $n+h$ сумму $3 + \frac{M + hd}{10^5}$, то сдѣлаемъ погрѣшность, абс. величина которой меньше $\frac{1}{2}$ стотысячной.

Такимъ образомъ, мы можемъ написать уравненіе:

$$3 + \frac{M + \Delta + \omega}{10^5} = 3 + \frac{M + hd + \gamma}{10^5},$$

изъ котораго находимъ:

$$\Delta + \omega = hd + \gamma \quad \text{и, слѣд.,} \quad h = \frac{\Delta + \omega - \gamma}{d}.$$

Такова точная величина дроби k ; поэтому, беря вместо этой величины приближение $k = \frac{\Delta}{d}$, выведенное нами согласно правилу § 312, мы делаем ошибку:

$$\frac{\Delta + \omega - \gamma}{d} - \frac{\Delta}{d} = \frac{\omega - \gamma}{d},$$

которая, очевидно, меньше дроби

$$\frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{d},$$

где $|\omega|$ означает абс. величину погрѣшности данного логарифма (или ея предѣлъ), выраженную въ стотысячныхъ доляхъ.

Таковъ предѣлъ погрѣшности приближеннаго числа $n + \frac{\Delta}{d}$, въ которомъ дробь $\Delta : d$ оставлена въ точномъ видѣ. Предѣлъ этотъ превосходить 0,01, такъ какъ, очевидно:

$$\frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{d} > \frac{\frac{1}{2}}{d} = \frac{1}{2d},$$

а величина d на всемъ протяженіи пятизначныхъ таблицъ меньше 45 и, слѣд.,

$$\frac{1}{2d} > \frac{1}{90} > \frac{1}{100}.$$

Поэтому, обращая дробь $\frac{\Delta}{d}$ въ десятичную, безпомезно находить цифру сотыхъ, а достаточно ограничиться цифрою десятыхъ, при чемъ для уменьшенія ошибки лучше брать 6 или 7 а не 5 и 6 шую цифру десятыхъ, т. е. увеличивать цифру десятыхъ на 1 всякій разъ, когда цифра сотыхъ была бы 5 или болѣе. При этомъ, конечно, мы вводимъ еще ошибку въ нѣсколько сотыхъ (меньшую однако 5 сотыхъ, т. е. $\frac{1}{20}$), такъ что предѣлъ окончательной погрѣшности найденнаго согласно правилу § 312 числа можно представить такъ:

$$\frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{d} + \frac{1}{20}.$$

Мы предполагали до сего времени, что характеристика данного логарифма есть 3, и что, слѣд., въ некоемъ десятичномъ числѣ занятая стоитъ послѣ 4-й цифры слѣва. Когда характеристика будетъ иная, то въ найденномъ выше числѣ занятую придется перенести влево или вправо, т. е. раздѣлить число или умножить его на нѣкоторую степень 10. При этомъ, конечно, погрѣшность результата также раздѣлится или умножится на ту же степень 10.

Ниже (§ 316, а и слѣд.) мы приложимъ все сказанное къ нѣкоторымъ примѣрамъ, при чемъ увидимъ, что иногда приходится считаться еще и съ другими вѣточностями, кромѣ тѣхъ, о которыхъ мы говорили.

314. Дѣйствія надъ логариемами съ отрицательными характеристиками. Сложене и вычитаніе не представляютъ никакихъ затрудненій, какъ это видно изъ слѣдующихъ примѣровъ:

$$\begin{array}{r}
 \bar{2},97346 \\
 + \\
 \hline
 1,83027 \\
 \hline
 0,80373
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \bar{3},83846 \\
 + \\
 \hline
 \bar{5},98043 \\
 \hline
 \bar{7},81889
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \bar{1},03842 \\
 - \\
 \hline
 5,96307 \\
 \hline
 \bar{7},07535
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 0,00523 \\
 - \\
 \hline
 \bar{4},57369 \\
 \hline
 3,43154
 \end{array}$$

Не представляетъ никакихъ затрудненій также и умноженіе логариема на положительное число; напр.,

$$\begin{array}{r}
 \bar{3},56376 \\
 \times 9 \\
 \hline
 22,25384
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \bar{2},47356 \\
 \times 34 \\
 \hline
 189424 \\
 142068 \\
 \hline
 16,10104 \\
 -68 \\
 \hline
 \bar{52},10104.
 \end{array}$$

Въ послѣднемъ примѣрѣ отдѣльно умножена положительная мантисса на 34, затѣмъ отрицательная характеристика на 34.

Если логариемъ съ отрицательной характеристикой и положительной мантиссой умножается на отрицательное число, то поступаютъ двояко: или предварительно данный логариемъ обращаютъ въ отрицательный, или же умножаютъ отдѣльно мантиссу и характеристику, и результаты соединяютъ вмѣстѣ; напримѣръ:

- 1) $\bar{3},56327 \cdot (-4) = -2,43673 \cdot (-4) = 9,74692$;
- 2) $\bar{3},56327 \cdot (-4) = +12 - 2,25308 - 9,74692$.

При дѣленіи могутъ представиться два случая: 1) отрицательная характеристика дѣлится и 2) не дѣлится на дѣлителя. Въ первомъ случаѣ отдѣльно дѣлятъ характеристику и мантиссу:

$$\bar{10},37846 : 5 = \bar{2},07569.$$

Во второмъ случаѣ прибавляютъ къ характеристикѣ столько

отрицательныхъ единицъ, чтобы образовавшееся число дѣлилось на дѣлителя; къ мантиссѣ прибавляютъ столько же положительныхъ единицъ:

$$\bar{3},76081 : 8 = (-8 + 5,76081) : 8 = \bar{1},72010.$$

Это преобразование надо совершать въ умѣ, такъ что дѣйствіе располагается такъ:

$$\bar{3},76081 : 8 = \bar{1},72010 \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} \bar{3},76081 \mid 8 \\ \underline{1,72010} \end{array}$$

315. Замѣна вычитаемыхъ логариемовъ слагаемыми. При вычисленіи какого-нибудь сложнаго выраженія помощью логариемовъ приходится нѣкоторые логариемы складывать, другіе вычитать; въ такомъ случаѣ, при обыкновенномъ способѣ совершенія дѣйствій, находятъ отдѣльно сумму слагаемыхъ логариемовъ, потомъ сумму вычитаемыхъ и изъ первой суммы вычитаютъ вторую. Напр., если имѣемъ:

$$\text{Log } x = 2,73058 - 2,07406 + 3,54646 - 8,35890,$$

то обыкновенное выполненіе дѣйствій расположится такъ:

$$\begin{array}{r} + 2,73058 \quad + 2,07406 \quad - 0,27704 \\ + 3,54646 \quad + 8,35890 \quad - 6,43296 \\ \hline 0,27704 \quad 6,43296 \quad 7,84408 = \text{Log } x. \end{array}$$

Есть однако возможность замѣнить вычитаніе сложениемъ. Для этого достаточно поступить такъ, какъ поступаютъ, когда у отрицательнаго логариема хотять сдѣлать мантиссу положительной (§ 306), т. е. достаточно прибавить +1 къ отрицательной мантиссѣ и —1 къ характеристикѣ. Такъ,

$$\begin{aligned} -2,07406 &= -2 - 0,07406 = -2 - 1 + (1 - 0,07406) = \\ &= 2 - 1 + 0,92594 = 1,92594. \end{aligned}$$

$$\text{Точно такъ же: } -8,35890 = \overset{-1+1}{-8,35890} = \bar{9},64110.$$

Отсюда выводимъ такое **правило**: чтобы вычесть логариемъ, достаточно прибавить другой логариемъ, который составляется изъ пер-

ваго такъ: характеристика увеличивается на 1 и результат берется съ противоположнымъ знакомъ, а всеѣ цифры мантиссы вычитаются изъ 9, кромѣ послѣдней справа значащей цифры, которая вычитается изъ 10.

Руководствуясь этимъ правиломъ, можемъ прямо писать:

$$\overline{-2,07406} = 1,92594, \quad \overline{-8,35890} = \overline{9,64110}$$

и расположить вычисленіе въ нашемъ примѣрѣ такъ.

$$\begin{array}{r} 2,73058 \\ 1,92594 \\ +3,54646 \\ \hline \overline{9,64110} \\ \hline \overline{7,84408} = \text{Log } x. \end{array}$$

Примѣры вычисленій помощью логарифмовъ.

316. Примѣръ 1. Вычислить выраженіе:

$$x = \frac{\sqrt[3]{A} \cdot B^4}{C^3 \cdot \sqrt[3]{D}},$$

если $A=0,821573$, $B=0,04826$, $C=0,0051275$ и $D=7,24635$.

Логарифмируемъ данное выраженіе:

$$\text{Log } x = \frac{1}{3} \text{Log } A + 4 \text{Log } B - 3 \text{Log } C - \frac{1}{3} \text{Log } D.$$

Теперь производимъ вычисленіе $\text{Log } x$ и затѣмъ x :

Предварительныя вычисленія.

A) Число.	Логарифмъ		B)
8215	3,91461	$d = 5$	$\text{Log } 0,04826 = \overline{2,68359}$
7	35		$4 \text{Log } B . . . = \overline{6,73436}$
3	15		
<hr/>	<hr/>		
0,821573	$\overline{1,91465}$		
$\frac{1}{3} \text{Log } A . . . =$	$\overline{1,97155}$		

C) Число.	Логарифмъ.	
5127	3,70986	$d=9$
<u>5</u>	<u>45</u>	
0,0051275	3,70991	
3 Log C	$\bar{7},12973$	
-3 Log C	$\bar{6},87027$	

D) Число.	Логарифмъ.	
7246	3,86010	$d=6$
<u>3</u>	<u>18</u>	
5	30	
7,24635	0,86012	
$\frac{1}{3}$ Log D	$\bar{0},28671$	
$-\frac{1}{3}$ Log D	$\bar{1},71329$	

Окончательныя вычисленія.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \text{Log } A &= \bar{1},97155, \\ 4 \text{Log } B &= \bar{6},73436 \\ -3 \text{Log } C &= \bar{6},87027 \\ -\frac{1}{3} \text{Log } D &= \bar{1},71329 \\ \hline \text{Log } x &= \bar{1},28947 \\ \text{Log } x_1 &= 3,28947 \end{aligned}$$

Логарифмъ.	Число.	
3,28947		$d=22$
<u>37</u>	<u>1947</u>	
10	0,4	
3,28947	1947,4	
1,28947	19,474	
	$x_1 = 1947,4$	
	$x = 19,474$	

Замѣчаніе. При вычисленіяхъ помощью логарифмовъ какого-нибудь сложнаго выраженія очень полезно, ради экономіи времени и мѣста, прежде чѣмъ обращаться къ таблицамъ, предварительно выписать въ надлежашемъ порядкѣ все, что можно написать безъ помощи таблицъ. Желая, напр., вычислить выраженіе, данное въ приведенномъ выше примѣрѣ 1-мъ, мы предварительно выписываемъ слѣдующее расположеніе вычисленій:

$$\text{Log } x = \frac{1}{3} \text{Log } A + 4 \text{Log } B - 3 \text{Log } C - \frac{1}{3} \text{Log } D.$$

Предварительныя вычисленія.

A) Число.	Логарифмъ.	
8215	3,	$d=$
<u>7</u>	<u> </u>	
3		
0,821573	$\bar{1},$	
$\frac{1}{3} \text{Log } A$		

B)	
Log 0,04826	$\bar{2},$
4 Log B	$=$

<p>C) Число. Логарифм.</p> <p style="padding-left: 40px;">5127 3, $d=$</p> <p style="padding-left: 80px;">5 </p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>0,0051275 3,</p> <p style="padding-left: 20px;">3 Log C </p> <p style="padding-left: 20px;">—3 Log C </p>	<p>D) Число. Логарифм.</p> <p style="padding-left: 40px;">7246 3, $d=$</p> <p style="padding-left: 80px;">3 </p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>7,24635 </p> <p style="padding-left: 20px;">$\frac{1}{3}$ Log D.</p> <p style="padding-left: 20px;">—$\frac{1}{3}$ Log D.</p>
---	--

Окончательныя вычисления.

<p>$\frac{1}{3}$ Log A =</p> <p>4 Log B =</p> <p>—3 Log C =</p> <p>—$\frac{1}{3}$ Log D =</p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>Log x =</p> <p>Log x_1 =</p>	<p>Логарифм. Число.</p> <p>3, $d=$</p> <p>.</p> <p>.</p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/>
--	---

316,а. Предѣль погрѣшности. Сначала найдем предѣль погрѣшности числа $x_1=1947,4$, равный, какъ мы видѣли (§ 313,а):

$$\frac{|\omega| + 1}{d} + \frac{1}{20}.$$

Значитъ, предварительно надо найти $|\omega|$, т.-е. предѣль погрѣшности приближеннаго логарифма числа x_1 или—что все равно—предѣль погрѣшности приближеннаго логарифма числа x (выраженный въ сотыхъ доляхъ). Логарифмъ этотъ (какъ въ нашемъ примѣрѣ, такъ и въ большинствѣ другихъ примѣровъ) получается отъ сложения нѣсколькихъ приближенныхъ слагаемыхъ; въ нашемъ примѣрѣ каждое изъ этихъ слагаемыхъ получается отъ умноженія приближеннаго логарифма на точное число (цѣлое или дробное, положительное или отрицательное). Поэтому мы прежде всего уяснимъ себѣ слѣдующія 2 простыя истины приближенныхъ вычисленій:

I. За предѣль погрѣшности суммы приближенныхъ слагаемыхъ, можно принять сумму абсолютныхъ величинъ погрѣшностей этихъ слагаемыхъ (или ихъ предѣловъ).

Положимъ, напр., что a, b, c, \dots будутъ приближенные слагаемыя, о которыхъ мы не знаемъ, взяты ли они съ избыткомъ, или съ недостаткомъ, но известно, что абсолютныя величины погрѣшностей (или ихъ предѣловъ) этихъ слагаемыхъ суть соответственно числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Тогда точныя слагаемыя должны быть: $a \pm \alpha, b \pm \beta, c \pm \gamma, \dots$ (гдѣ знаки $+$ и $-$ не находятся въ соответствіи); слѣд., приближенная сумма $a+b+c+\dots$ разнится отъ точной суммы: $(a \pm \alpha) + (b \pm \beta) + (c \pm \gamma) + \dots = (a + b + c + \dots) +$

($\pm \alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \dots$) на алгебраическую сумму $\pm \alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \dots$, которая очевидно, не больше арифметической суммы $\alpha + \beta + \gamma \dots$; значить, эту последнюю сумму можно принять за предѣлъ погрѣшности приближенной суммы.

II. За предѣлъ погрѣшности произведенія приближенного числа на точное можно принять произведеніе абсолютной величины погрѣшности приближенного сомножителя (или ея предѣла) на абсолютную величину точнаго сомножителя.

Такъ, пусть a есть приближенное число, абс. величина погрѣшности котораго есть α , и n какое-нибудь точное число (цѣлое или дробное, положительное или отрицательное—все равно); тогда приближенное произведеніе an разнится отъ точнаго произведенія $(a \pm \alpha)n = an \pm \alpha n$ на число $\pm \alpha n$, а это число не превосходитъ произведенія α на абсолютную величину числа n .

Пользуясь эти двумя истинами и принявъ во вниманіе, что предѣлъ погрѣшности логарифма, взятаго непосредственно изъ таблицъ, есть $\frac{1}{2}$ стотысячной (§ 310, 1°), а логарифма, найденнаго указаннымъ нами вычисленіемъ, есть 1 стотысячная, мы найдемъ, что предѣлъ погрѣшности есть:

въ $\text{Log } A \dots 1$ стотыс.	въ $\text{Log } C \dots 1$ стотыс.
въ $\frac{1}{2} \text{Log } A \dots \frac{1}{2}$ "	въ $-3 \text{Log } C \dots 3$ "
въ $\text{Log } B \dots \frac{1}{2}$ "	въ $\text{Log } D \dots 1$ "
въ $4 \text{Log } B \dots 2$ "	въ $\frac{1}{2} \text{Log } D \dots \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ стот.
	въ $-\frac{1}{2} \text{Log } D \dots \frac{1}{2}$

Для $\frac{1}{2} \text{Log } D$ (и, слѣд., для $-\frac{1}{2} \text{Log } D$) къ предѣлу погрѣшности $\frac{1}{2}$ мы добавили еще дробь $\frac{1}{2}$, такъ какъ, для $\text{Log } D = 0,86012$ на 3, мы въ частномъ округлили число стотысячныхъ, взявъ ближайшее цѣлое число, и, слѣд., сдѣлали еще ошибку, меньшую $\frac{1}{2}$ стотысячной. Раньше, находя предѣлъ погрѣшности въ $\frac{1}{2} \text{Log } A$, мы такого добавленія не сдѣлали, такъ какъ $\text{Log } A = \overline{1},91465$ при дѣленіи на 3 даетъ цѣлое число стотысячныхъ.

Теперь находимъ предѣлъ погрѣшности $\text{Log } x$ (я, слѣд., $\text{Log } x_1$):

$$|\omega| = \frac{1}{2} + 2 + 3 + \frac{1}{2} = 6\frac{1}{2} \text{ (стотыс.)}$$

Слѣд., предѣлъ погрѣшности числа x_1 есть

$$\begin{aligned} \frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{20} &= \frac{6\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{22} + \frac{1}{20} = \frac{6\frac{1}{2}}{22} + \frac{1}{20} = \frac{20}{66} + \frac{1}{20} = \frac{400 + 66}{1320} = \\ &= \frac{466}{1320} = 0,353 \dots < 0,4. \end{aligned}$$

Такъ какъ $x = x_1 \cdot \frac{1}{100}$, то предѣлъ погрѣшности въ x есть $0,4 \cdot \frac{1}{100} = 0,004$.

Такимъ образомъ, найденное нами для x приближенное число 19,474 разнится отъ точнаго числа менѣе, чѣмъ на 0,004. Такъ какъ мы не знаемъ,

съ недостаткомъ или съ избыткомъ найдено такое приближеніе, то можемъ только ручаться за то, что

$$19,474 + 0,004 > x > 19,474 - 0,004$$

т.-о. $19,478 > x > 19,470$

и потому, если положимъ: $x = 19,47$, то будемъ имѣть приближеніе съ недостаткомъ, съ точностью до 0,01.

316,в. Примѣръ 2. Вычислить формулу:

$$x = (-2,31)^3 \sqrt[5]{72} = -(2,31)^3 \sqrt[5]{72}.$$

Такъ какъ отрицательныя числа не имѣютъ логарифмовъ, то предварительно находимъ:

$$x' = (2,31)^3 \sqrt[5]{72}$$

по разложению:

$$\text{Log } x' = 3 \text{ Log } 2,31 + \frac{1}{5} \text{ Log } 72.$$

Предварительныя вычисления.

$$\text{Log } 2,31 = 0,36361 \qquad \text{Log } 72 = 1,85733$$

$$3 \text{ Log } 2,31 = 1,09083 \qquad \frac{1}{5} \text{ Log } 72 = 0,37147$$

Обоимъ вычислениямъ.

	Логарифмъ.	Число.
3 Log 2,31 = 1,09083	3,46230	
$\frac{1}{5}$ Log 72 = 0,37147	25 2899	d=15
Log x' = 1,46230	5 0,3	
Log x ₁ = 3,46230	3,46230 2899,3	
	1,46230 28,993	

$$x_1 = 2899,3$$

$$x' = 28,993$$

$$x = -28,993.$$

Пределъ погрѣшности. Такъ какъ логарифмы чиселъ 2,31 и 72 берутся непосредственно изъ таблицъ, то пределъ погрѣшности каждаго изъ нихъ есть $\frac{1}{2}$ стотысячной. Поэтому:

пределъ погрѣшности въ 3 Log 2,31 есть $\frac{3}{2}$ стотыс.

" " " $\frac{1}{5}$ Log 72 " $\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{6}{10}$ "

" " " Log x₁ " $\frac{3}{2} + \frac{6}{10} = 2,1$ "

Предѣлъ погрѣшности въ числѣ $x_1 = 2899,3$ равенъ:

$$\frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{d} + \frac{1}{20} = \frac{2,1 + 0,5}{15} + 0,05 = 0,173... + 0,05 = 0,223...$$

Такъ какъ $x' = x_1 \cdot \frac{1}{100}$, то предѣлъ погрѣшности въ x' (и, слѣд., въ x) есть $0,00223... < 0,003$.

316, в. Примѣръ 3. Вычислить: $x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{8} + \sqrt[4]{3}}$.

Сплошного логарифмированія здѣсь примѣнить нельзя, такъ какъ подъ знакомъ корня стоитъ сумма. Въ подобныхъ случаяхъ вычисляютъ формулу по частямъ. Сначала находимъ $N = \sqrt[5]{8}$, потомъ $N_1 = \sqrt[4]{3}$; далѣе простымъ сложениемъ опредѣляемъ $N + N_1$ и, наконецъ, вычисляемъ $\sqrt[3]{N + N_1}$:

Log $N = \frac{1}{5} \text{Log } 8$	
Log 8 = 0,90309	
$\frac{1}{5} \text{Log } 8 = 0,18062$	
Логарифм.	Число.
3,18062	
41 1515	$d=29$
21 0,7	
3,18062 1515,7	
0,18062 1,5157	
$N = 1,5157$	

Log $N_1 = \frac{1}{4} \text{Log } 3$	
Log 3 = 0,47712	
$\frac{1}{4} \text{Log } 3 = 0,11928$	
Логарифм.	Число.
3,11928	
26 1316	$d=33$
2 0,1	
3,11928 1316,1	
0,11928 1,3161	
$N = 1,3161$	

$$\text{Log } x = \text{Log} \sqrt[3]{N + N_1} = \frac{1}{3} \text{Log} (1,5157 + 1,3161) = \frac{1}{3} \text{Log} 2,8318.$$

Число.	Логарифм.	
2831 3,45194		$d=15$
8 12,0		
2831,8 3,45206		
2,8318 0,45206		
$\frac{1}{3} \text{Log } 2,8318 = 0,15069$		
$x_1 = 1,414,8;$		

Логарифм.	Число.	
3,15069		
45 1414		$d=31$
24 0,8		
3,15062 1414,8		
0,15062 1,4148		
$x = 1,4148.$		

Предѣлъ погрѣшности. Вычисленіе предѣла погрѣшности будемъ вести въ слѣдующей послѣдовательности.

ГЛАВА VI.

Показательныя и логариемическія уравненія.

317. Опреѣленіе. Показательными уравненіями называются такія, въ которыхъ неизвѣстное входитъ въ видѣ показателя степени, а логариемическими — такія уравненія, въ которыхъ неизвѣстное входитъ подъ знакомъ Log.

Такія уравненія могутъ быть разрѣшаемы только въ частныхъ случаяхъ, при чемъ приходится основываться на свойствахъ логариемовъ и на томъ началѣ, что если числа равны, то равны и ихъ логариемы (когда основаніе не равно 1), и обратно: если логариемы равны, то равны и соответствующія имъ числа.

Примѣръ 1. Рѣшить уравненіе: $2^x = 1024$.
Логариемуемъ обѣ части уравненія:

$$x \text{ Log } 2 = \text{Log } 1024; \quad x = \frac{\text{Log } 1024}{\text{Log } 2} = \frac{3,01030}{0,30103} = 10.$$

Примѣръ 2. Рѣшить уравненіе: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} = 5$.

Подобно предыдущему находимъ:

$$(x^2-2x) \text{ Log } \frac{1}{3} = \text{Log } 5; \quad (x^2-2x)(-\text{Log } 3) = \text{Log } 5;$$

$$x^2 - 2x + \frac{\text{Log } 5}{\text{Log } 3} = 0; \quad x = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\text{Log } 5}{\text{Log } 3}}.$$

Такъ какъ $1 < \frac{\text{Log } 5}{\text{Log } 3}$, то уравненіе невозможно при вещественныхъ значеніяхъ x .

Примѣръ 3. Рѣшить уравненіе: $0,001^{2x} = 0,3$.
Логариемируя въ первый разъ, получимъ:

$$2x = \frac{\text{Log } 0,3}{\text{Log } 0,001} = \frac{1,47712}{-3} = \frac{-0,52288}{-3} = 0,17429.$$

Логарифмируя еще разъ, найдемъ:

$$x = \frac{\text{Log } 0,17429}{\text{Log } 2} = \frac{\overline{1},24128}{0,30103} = \frac{-0,75872}{0,30103} = -2,52\dots$$

Примѣръ 4. Рѣшить уравненіе: $a^{2x} - a^x = 1$.
Положивъ $a^x = y$, получимъ квадратное уравненіе:

$$y^2 - y - 1 = 0, \text{ откуда: } y_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad y_{11} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Слѣд.,} \quad a^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ и } a^x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Такъ какъ $1 - \sqrt{5} < 0$, то послѣднее уравненіе невозможно, (отрицательныя числа не имѣютъ логарифмовъ), а первое даетъ:

$$x = \frac{\text{Log } (1 + \sqrt{5}) - \text{Log } a}{\text{Log } a}.$$

Примѣръ 5. Рѣшить уравненіе:

$$\text{Log } (a+x) + \text{Log } (b+x) = \text{Log } (c+x).$$

Уравненіе можно написать такъ:

$$\text{Log } [(a+x)(b+x)] = \text{Log } (c+x).$$

Изъ равенства логарифмовъ заключаемъ о равенствѣ чиселъ:

$$(a+x)(b+x) = c+x.$$

Это есть квадратное уравненіе, рѣшеніе котораго не представляетъ затрудненій.

Примѣръ 6. Рѣшить систему:

$$xy = a^2, \quad \text{Log}^2 x + \text{Log}^2 y = \frac{5}{2} \text{Log}^2 a.$$

Первое уравненіе можно замѣнить такимъ:

$$\text{Log } x + \text{Log } y = \text{Log } a^2.$$

Возвысивъ это уравненіе въ квадратъ и вычтя изъ него второе данное, получимъ:

$$2 \text{Log } x \text{Log } y = \text{Log}^2 a^2 - \frac{5}{2} \text{Log}^2 a^2. \text{ слѣд.: } \text{Log } x \text{Log } y = -\frac{3}{2} \text{Log}^2 a^2.$$

Зная сумму и произведение логарифмовъ, легко найдемъ и самые логарифмы:

$$\text{Log } x = \frac{3}{2} \text{Log } a^2 = \text{Log} \left(a^2 \right)^{\frac{3}{2}} = \text{Log } a^3; \quad x = a^3.$$

$$\text{Log } y = -\frac{1}{2} \text{Log } a^2 = \text{Log} \left[(a^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \text{Log } a^{-1}; \quad y = a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Такъ какъ данныя уравненія симметричны относительно x и y , то значеніе для x можетъ быть принято за значеніе для y , и наоборотъ; такъ что можно также положить: $y = a^3$, $x = a^{-1}$.

Примѣръ 7. Вычислить выраженіе $10^{1-\text{Log } 1, (8)}$, въ которомъ знакъ Log означаетъ десятичный логарифмъ.

Обозначивъ искомое число черезъ x , будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} x &= 10^{1-\text{Log } 1, (8)}; \quad \text{Log } x = (1 - \text{Log}_{\frac{4}{8}}) \text{Log } 10 = 1 - \text{Log}_{\frac{4}{8}} = \\ &= \text{Log } 10 - \text{Log}_{\frac{4}{8}} = \text{Log}_{\frac{80}{4}}; \quad x = \frac{80}{4} = \frac{16}{2} = 7,5. \end{aligned}$$

ГЛАВА VII.

Сложные проценты, срочныя уплаты и срочные взносы.

§18. Основная задача на сложные проценты.

Говорятъ, что капиталъ отдакъ по сложнымъ процентамъ, если принимаются во вниманіе такъ называемые «проценты на проценты», т.-е. если причитающіяся на капиталъ процентныя деньги присоединяются въ концѣ каждаго года къ капиталу для начисленія ихъ процентами въ слѣдующіе годы.

Задача. Въ какую сумму обратится капиталъ a рублей, отданный въ ростъ по p сложнымъ процентамъ, по прошествіи t лѣтъ (t цѣлое число)?

Каждый рубль капитала, отданнаго по $p\%$, въ теченіе одного года принесетъ прибыли $\frac{p}{100}$ рубля, и слѣд., каждый рубль капитала черезъ 1 годъ обратится въ $1 + \frac{p}{100}$ рубля (напр., если капиталъ отданъ по 5% , то каждый рубль его черезъ годъ обратится въ $1 + \frac{5}{100}$, т.-е. въ 1,05 рубля). Обозначивъ для краткости дробь $\frac{p}{100}$ одною буквою, напр. r , можемъ сказать, что каждый рубль капитала черезъ годъ обратится въ $1 + r$ рубля; слѣд., a рублей обратятся черезъ 1 годъ въ $a(1+r)$ руб. Еще черезъ годъ, т.-е. черезъ 2 года отъ начала роста, каждый рубль изъ этихъ $a(1+r)$ руб. обратится снова въ $1+r$ руб.; значитъ, весь капиталъ обратится въ $a(1+r)^2$ руб. Такимъ же образомъ найдемъ, что черезъ три года капиталъ будетъ $a(1+r)^3$, черезъ 4 года $a(1+r)^4$... вообще черезъ t лѣтъ, если t цѣлое число, онъ обратится въ $a(1+r)^t$ руб. Такимъ образомъ, обозначивъ черезъ A окончательный капиталъ, будемъ имѣть слѣдующую **формулу сложныхъ процентовъ**:

$$A = a(1+r)^t, \text{ гдѣ } r = \frac{p}{100} \quad [1]$$

Примѣръ. Пусть $a=2300$ руб., $p=4$, $t=20$ лѣтъ; тогда формула даетъ:

$$r = \frac{4}{100} = 0,04; \quad A = 2300 (1,04)^{20}.$$

Чтобы вычислить A , примѣняемъ логарисмы:

$$\begin{aligned} \text{Log } A &= \text{Log } 2300 + 20 \text{ Log } 1,04 = 3,36173 + 20 \cdot 0,01703 = \\ &= 3,36173 + 0,34060 = 3,70233. \end{aligned}$$

$$A = 5039 \text{ руб.}$$

Замѣчанія. 1°. Въ этомъ примѣрѣ намъ пришлось $\text{Log } 1,04$ умножить на 20. Такъ какъ число 0,01703 есть приближенное значеніе $\text{Log } 1,04$ съ точностью до $\frac{1}{2}$ стотысячной доли, то произведеніе этого числа на 20 будетъ точно только до $\frac{1}{2} \cdot 20$,

т.-с. до 10 сотысячных = 1 десятитысячной. Поэтому въ суммѣ 3,70233 мы не можемъ ручаться не только за цифру сотысячныхъ, но и за цифру десятитысячныхъ. Чтобы въ подобныхъ случаяхъ можно было получить ббольшую точность, лучше для числа $1+r$ брать логарномы не 5-значные, а съ ббольшимъ числомъ цифръ, напр. 7-значные. Для этой цббли мы приводимъ здбсь небольшую табличку, въ которой выписаны 7-значные логарномы для наиболбве употребительныхъ значений p :

p	$1+r$	$\text{Log}(1+r)$
3	1,03	0,0128 372
$3\frac{1}{4}$	1,0325	0,0138 901
$3\frac{1}{2}$	1,035	0,0149 403
$3\frac{3}{4}$	1,0375	0,0159 881
4	1,04	0,0170 333
$4\frac{1}{4}$	1,0425	0,0180 761
$4\frac{1}{2}$	1,045	0,0191 163
$4\frac{3}{4}$	1,0475	0,0201 540
5	1,05	0,0211 893

2°. Существуютъ особыя таблицы, въ которыхъ выписаны значенія мпожителя $(1+r)^t$ для разныхъ r и t . Пользуясь такими таблицами, можно, конечно, обойтись безъ логарномовъ.

319. Случай, когда время выражается дробнымъ числомъ лбтъ. Если время, на которое отданъ капиталъ, состоитъ изъ t полныхъ лбтъ и еще k дней, то можно сдблать два предположенія: 1) капиталъ a нарастаетъ сложными процентами за все время, или 2) сложные проценты считаются только за цбловое число лбтъ, а за k дней счетъ прибыли идетъ на простые проценты. Первое имбдетъ мбсто въ тбхъ случаяхъ, когда парастаніе, не завися отъ условій, принятыхъ человекомъ, идетъ непрерывно по одному и тому же закону (напр., при увеличеніи съ теченіемъ времени численности населенія въ 'какой-нибудь странб). Второе имбдетъ мбсто въ банковыхъ операцияхъ. Легко уббдаться, что въ первомъ случаб законъ парастанія выражается тою же формулою [1], которую мы вывели для t цблага. Предположимъ, въ самомъ

дѣвъ, что $t = \frac{p}{q}$ лѣтъ, и допустимъ, что 1 рубль черезъ $\frac{1}{q}$ часть года обр- шается въ $1+x$ руб. Тогда черезъ $\frac{q}{q}$ частей, т.-е. черезъ 1 годъ, онъ обратится въ $(1+x)^q$, а черезъ $\frac{p}{q}$ года—въ $(1+x)^p$. Но, по смыслу задачи, имѣемъ:

$$(1+x)^q = 1+r,$$

откуда: $1+x = (1+r)^{\frac{1}{q}}$ и $(1+x)^p = (1+r)^{\frac{p}{q}}$,

т.-е.

$$A = a(1+r)^t.$$

Для случая, когда нарастаніе за часть года рассчитывается по простымъ процентамъ, можно составить другую формулу такимъ образомъ: черезъ t полныхъ лѣтъ капиталъ, нарастая сложными процентами, обратится въ $a(1+r)^t$ руб.; въ k дней каждый рубль принесетъ, считая простые проценты, $\frac{rk}{360}$ руб. процентныхъ денегъ (годъ при коммерческихъ расчетахъ считается въ 360 дней); каждый рубль изъ $a(1+r)$ рублей обратится черезъ k дней въ $1 + \frac{rk}{360}$ руб. Поэтому окончательный капиталъ будетъ:

$$A = a(1+r)^t \left(1 + \frac{rk}{360}\right). \quad (2)$$

Если напр., $a=2300$, $r=5$, $t=10$ и $k=36$, то найдемъ:

$$A = 2300(1,05)^{10}(1+0,005),$$

$$\text{Log } A = \text{Log } 2300 + 10 \text{ Log } 1,05 + \text{Log } 1,005 = 3,57580;$$

$$A = 3765,33.$$

320. По даннымъ тремъ изъ чиселъ: A , a , r и t опредѣлить четвертое. Формула (1) (§ 318) применима и къ рѣшенію такихъ задачъ, въ которыхъ неизвѣстно или a , или r , или t при прочихъ данныхъ числахъ. Такъ, изъ нея находимъ:

для опредѣленія начального капитала: $a = \frac{A}{(1+r)^t}$,

и слѣд., $\text{Log } a = \text{Log } A - t \text{ Log } (1+r)$;

для опредѣленія процента: $1+r = \sqrt[t]{\frac{A}{a}}$,

и слѣд., $\text{Log } (1+r) = \frac{1}{t} (\text{Log } A - \text{Log } a)$.

Вычислив по таблицам $1+r$, найдем потом r , т.-е. $\frac{p}{100}$,

а затѣмъ и p .

Для опредѣленія времени будемъ имѣть:

$$\text{Log } A = \text{Log } a + t \text{ Log } (1+r),$$

откуда:
$$t = \frac{\text{Log } A - \text{Log } a}{\text{Log } (1+r)}$$

При рѣшеніи задачъ по формулѣ [2] (§ 318) могутъ представиться нѣкоторыя затрудненія. Такъ, для опредѣленія процента эта формула даетъ уравненіе степени $(t+1)$ -й относительно r , которое вообще не разрѣшается элементарно. Въ этомъ случаѣ можно удовольствоваться приближеннымъ рѣшеніемъ, которое находятъ слѣдующимъ образомъ. Назначивъ для r произвольное число, вычисляють по формулѣ [2] капиталъ A ; если найденное значеніе окажется менше даннаго, то, замѣтивъ, что съ увеличеніемъ r увеличивается и A , дають для t другое произвольное значеніе, большее прежняго, и снова вычисляють A ; если это значеніе окажется все-таки меньше даннаго, то еще увеличивають r . Послѣ нѣсколькихъ испытаній находятъ для r такое число, при которомъ вычисленное значеніе A будетъ весьма мало отличаться отъ даннаго.

Затрудненіе представляется также и тогда, когда по формулѣ [2] опредѣляется время, потому что въ этомъ случаѣ получается одно уравненіе съ двумя неизвѣстными t и k . Затрудненіе это обходятъ, пользуясь сначала формулой [1] для вычисления цѣлаго числа лѣтъ, а потомъ—формулой [2] для вычисления k .

Задача. На какое время надо отдать капиталъ въ 5000 рублей по 6 сложнымъ процентамъ, чтобы вмѣсто него получить 6000 рублей?

Мы не знаемъ, будетъ ли искомое число цѣлое или дробное. Предположимъ, что оно будетъ цѣлое. Въ такомъ случаѣ можемъ воспользоваться формулой [1] (§ 318), которая даетъ:

$$6000 = 5000 \cdot 1,06^t \text{ или } 6 = 5 \cdot 1,06^t,$$

откуда, логарифмируя, найдемъ:

$$t = \frac{\text{Log } 6 - \text{Log } 5}{\text{Log } 1,06} = \frac{0,77815 - 0,69897}{0,02531} = \frac{0,07918}{0,02532} = 3,1...$$

Значитъ, нельзя предположить, что t есть число цѣлое, и потому, если только въ задачѣ подразумѣвается условіе, что за часть года нарастаніе идетъ по закону простыхъ процентовъ, мы не имѣемъ права пользоваться формулой [1]. Но не трудно понять, что найденный изъ этой формулы результатъ невѣренъ только относительно части года, а не цѣлаго числа

длгъ. Такимъ образомъ, мы можемъ въ формулѣ [2] (§ 318) на мѣсто t подставить найденное число 3, послѣ чего получимъ:

$$6000 = 5000 \cdot 1,06^3 \left(1 + \frac{0,06k}{360}\right) \quad \text{или} \quad 6 = 5 \cdot 1,06^3 \left(1 + \frac{0,01k}{60}\right);$$

откуда: $\text{Log} \left(1 + \frac{0,01k}{60}\right) = \text{Log } 6 - \text{Log } 5 - 3 \text{ Log } 1,06 = 0,00325.$

По таблицамъ находимъ: $1 + \frac{0,01k}{60} = 1,0075$; отсюда $k = 45$.

Слѣд., искомое время есть 3 года 45 дней.

321. Основная задача на срочныя уплаты.

Нѣкто занялъ a рублей по $p\%$ съ условіемъ погасить долгъ, вмѣстѣ съ причитающимися на него процентами, въ t лѣтъ, внося въ концѣ каждаго года одну и ту же сумму. Какова должна быть эта сумма?

Сумма x , вносимая ежегодно при такихъ условіяхъ, называется срочною уплатою. Обозначимъ опять буквою r

ежегодныя процентныя деньги съ 1 рубля, т. е. число $\frac{p}{100}$. Тогда

въ концѣ 1-го года долгъ a возрастетъ до $a(1+r)$, а за уплатою x рублей онъ сдѣлается $a(1+r) - x$. Къ концу 2-го года каждый рубль этой суммы снова обратится въ $1+r$ рублей, и потому долгъ будетъ $[a(1+r) - x](1+r) = a(1+r)^2 - x(1+r)$, а за уплатою x рублей окажется: $a(1+r)^2 - x(1+r) - x$. Такимъ же образомъ убѣдимся, что къ концу 3-го года долгъ будетъ $a(1+r)^3 - x(1+r)^2 - x(1+r) - x$ и вообще въ концѣ t -го года онъ окажется:

$$a(1+r)^t - x(1+r)^{t-1} - x(1+r)^{t-2} \dots - x(1+r) - x$$

или $a(1+r)^t - x[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{t-2} + (1+r)^{t-1}]$.

Многочленъ, стоящій внутри скобокъ [], представляетъ сумму членовъ геометрической прогрессіи, у которой первый членъ есть 1, послѣдній $(1+r)^{t-1}$, а знаменатель $(1+r)$. По формулѣ для суммы членовъ геометрической прогрессіи (§ 293) находимъ, что этотъ многочленъ равенъ:

$$s = \frac{1q - a}{q - 1} = \frac{(1+r)^{t-1}(1+r) - 1}{(1+r) - 1} = \frac{(1+r)^t - 1}{r}.$$

Вслѣдствіе этого величину долга послѣ t -ой уплаты можно написать такъ:

$$a(1+r)^t - x \frac{(1+r)^t - 1}{r}.$$

По условію задачи, долгъ въ концѣ t -го года долженъ равняться 0; поэтому

$$a(1+r)^t - x \frac{(1+r)^t - 1}{r} = 0, \text{ откуда } x = \frac{a(1+r)^t r}{(1+r)^t - 1}. \quad [1]$$

При вычисленіи этой формулы срочныхъ уплатъ помощью логарифмовъ мы должны сначала найти вспомогательное число $N = (1+r)^t$ по логарифму: $\text{Log } N = t \text{ Log } (1+r)$; найдя N , вычтемъ изъ него 1; тогда получимъ знаменателя формулы для x , послѣ чего вторичнымъ логарифмированіемъ найдемъ:

$$\text{Log } x = \text{Log } a + \text{Log } r + \text{Log } N - \text{Log } (N - 1).$$

322. По даннымъ тремъ изъ чиселъ: x , a , r и t опредѣлить четвертое. Та же формула можетъ служить для рѣшенія и такихъ задачъ, въ которыхъ извѣстна срочная уплата, а отыскивается или занятая сумма, или время, или величина процента. Изъ нея находимъ:

$$\text{для опредѣленія долга: } a = \frac{x[(1+r)^t - 1]}{r(1+r)^t};$$

$$\text{для опредѣленія времени: } (1+r)^t = \frac{x}{x-ar};$$

$$\text{откуда: } t = \frac{\text{Log } x - \text{Log } (x-ar)}{\text{Log } (1+r)}.$$

Въ послѣднемъ случаѣ задача окажется невозможною, если $x \leq ar$, такъ какъ отрицательныя числа не имѣютъ логарифмовъ, а $\text{Log } 0 = -\infty$ (слѣд., $t = +\infty$); невозможность задачи видна и а priori, такъ какъ произведеніе ar означаетъ ежегодныя процентныя деньги, а если срочная уплата меньше процентныхъ денегъ, или равна имъ, то, конечно, долгъ не можетъ быть погашенъ ни въ какое число лѣтъ. Задача также невозможна, если для t получается дробное число: заключающееся въ этомъ

дробномъ числѣ цѣлое число n означаетъ, что n срочными платежами долгъ не покрывается вполнѣ, а $n+1$ платежами онъ покрывается съ избыткомъ.

Когда неизвѣстна величина процента, мы получаемъ уравненіе степени $(t+1)$ -й, которое элементарно можетъ быть рѣшено только приблизительно, посредствомъ подстановки въ формулу [1] на мѣсто r произвольныхъ чиселъ до тѣхъ поръ, пока не получится для x числа, близкаго къ заданному.

323. Основная задача на срочные взносы.

Нѣкто вноситъ въ банкъ въ началѣ каждаго года одну и ту же сумму a руб. Определить, какой капиталъ образуется изъ этихъ ежегодныхъ взносовъ по прошествіи t лѣтъ, если банкъ платитъ по r сложнымъ процентамъ.

Обозначивъ черезъ r ежегодныя процентныя деньги съ 1 рубля, т.-е. $\frac{p}{100}$, разсуждаемъ такъ: къ концу 1-го года капиталъ будетъ $a(1+r)$; въ началѣ 2-го года къ этой суммѣ прибавится a руб.; значитъ, въ это время капиталъ окажется $a(1+r)+a$. Къ концу 2-го года онъ будетъ $a(1+r)^2+a(1+r)$; въ началѣ 3-го года снова вносится a руб.; значитъ, въ это время капиталъ будетъ $a(1+r)^2+a(1+r)+a$; къ концу 3-го года онъ окажется $a(1+r)^3+a(1+r)^2+a(1+r)$. Продолжая эти разсужденія далѣе, найдемъ, что къ концу t -го года искомый капиталъ A будетъ:

$$\begin{aligned} A &= a(1+r)^t + a(1+r)^{t-1} + a(1+r)^{t-2} + \dots + a(1+r) = \\ &= a(1+r)[(1+r)^{t-1} + (1+r)^{t-2} + \dots + 1] = \\ &= a(1+r) \frac{(1+r)^{t-1}(1+r) - 1}{(1+r) - 1} = a(1+r) \frac{(1+r)^t - 1}{r}. \end{aligned}$$

Такова формула срочныхъ взносовъ, дѣлаемыхъ въ началѣ каждаго года.

Ту же формулу можно было бы получить и такимъ разсужденіемъ. Первый взносъ въ a рублей, находясь въ банкѣ t лѣтъ, обрѣтется, согласно формулѣ сложныхъ процентовъ (§ 318),

въ $a(1+r)^t$ руб. Второй взносъ, находясь въ банкѣ однимъ годомъ меньше, т.-е. $t-1$ лѣтъ, обратится въ $a(1+r)^{t-1}$ руб. Подобно этому третій взносъ дастъ $a(1+r)^{t-2}$ и т. д. и, наконецъ, послѣдній взносъ находясь въ банкѣ только 1 годъ, обратится въ $a(1+r)$ руб.

Значить, окончательный капиталъ A руб. будетъ:

$$A = a(1+r)^t + a(1+r)^{t-1} + a(1+r)^{t-2} + \dots + a(1+r),$$

что, послѣ упрощенія, даетъ найденную выше формулу.

При вычисленіи помощью логарифмовъ этой формулы надо поступить такъ же, какъ и при вычисленіи формулы срочныхъ уплатъ, т.-е. сначала найти число $N=(1+r)^t$ по его логарифму: $\text{Log } N = t \text{ Log } (1+r)$, затѣмъ число $N-1$ и уже тогда логарифмировать формулу:

$$\text{Log } A = \text{Log } a + \text{Log } (1+r) + \text{Log } (N-1) - \text{Log } r.$$

Замѣчанія. 1°. Если бы срочный взносъ въ a руб. производился не въ началѣ, а въ концѣ каждаго года (какъ, напр., вносится срочная плата x для погашенія долга § 321), то, рассуждая подобно предыдущему, найдемъ, что къ концу t -го года искомый капиталъ A' руб. будетъ (считая въ томъ числѣ и послѣдній взносъ a руб., не приносящій процентовъ):

$$A' = a(1+r)^{t-1} + a(1+r)^{t-2} + \dots + a(1+r) + a,$$

что равно
$$A' = a \cdot \frac{[(1+r)^t - 1]}{r},$$

т.-е. A' оказывается въ $(1+r)$ разъ менѣе A , что и надо было ожидать, такъ какъ каждый рубль капитала A' лежитъ въ банкѣ годомъ меньше, чѣмъ соответствующій рубль капитала A .

2°. Существуютъ особая таблицы, въ которыхъ выписаны значенія множителей:

$\frac{(1+r)^t r}{(1+r)^t r - 1}$ (для срочн. уплатъ) и $\frac{(1+r)^t - 1}{r}$ (для срочн. взносовъ) для разныхъ r и t .

ОТДѢЛЪ IX.

Соединенія, биномъ Ньютона и непрерывныя дроби.

ГЛАВА I.

Соединенія.

§24. Опредѣленіе соединеній и ихъ раздѣленіе. Различныя группы, составленныя изъ данныхъ предметовъ и отличающіяся одна отъ другой или порядкомъ этихъ предметовъ, или самими предметами, называются соединеніями. Предметы, входяще въ соединенія, наз. элементами и обозначаются буквами a, b, c, d, \dots

Соединенія могутъ быть трехъ родовъ: размѣщенія (arrangements), перестановки (permutations) и сочетанія (combinaisons). Разсмотримъ ихъ отдѣльно.

§25. Размѣщенія. Размѣщеніями изъ данныхъ m элементовъ по n ($n \leq m$) называются такія соединенія, изъ которыхъ каждое содержитъ n элементовъ, взятыхъ изъ данныхъ m элементовъ, и которыя отличаются одно отъ другого или порядкомъ элементовъ, или самими элементами.

Напр., слѣдующія соединенія представляютъ собою размѣщенія изъ 4 элементовъ a, b, c, d по 2:

$$\begin{aligned} & ab, ac, ad, bc, bd, cd, \\ & ba, ca, da, cb, db, dc. \end{aligned}$$

Изъ нихъ нѣкоторыя, напр. ab и ba , отличаются только порядкомъ элементовъ, а другія, какъ ab и ac , отличаются элементами.

Размѣщенія изъ данныхъ m элементовъ могутъ быть по 1, по 2, по 3..., и, наконецъ, по m .

Такъ какъ число размѣщеній по 2 равно $m(m-1)$ и изъ каждаго размѣщенія по 2 получается $m-2$ размѣщенія по 3, то всѣхъ такихъ размѣщеній окажется $m(m-1)(m-2)$.

Законъ этотъ обладаетъ общностью, такъ какъ процессъ перехода отъ размѣщеній изъ m элементовъ по p къ размѣщеніямъ изъ m элементовъ по $p+1$ одинъ и тотъ же для всякой величины p .

Замѣтивъ это, можемъ писать вообще:

$$A_n^m = m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)].$$

Такова **формула размѣщеній**; ее можно выразить такъ: число всевозможныхъ размѣщеній изъ m элементовъ по n равно произведенію n послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ большее есть m . Такимъ образомъ:

$$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12, A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24, A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680, \text{ и т. п.}$$

Примѣры. 1°. Въ классѣ 10 учебныхъ предметовъ и 5 разныхъ уроковъ въ день. Сколькими способами могутъ быть распределены уроки въ день?

Всевозможныя распределенія уроковъ въ день представляютъ собою, очевидно, всевозможныя размѣщенія изъ 10 элементовъ по 5; поэтому всѣхъ способовъ распределенія будетъ:

$$A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$$

2°. Сколько можно образовать цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое выражалось бы тремя различными значащими цифрами?

Искомое число представляетъ собою число размѣщеній изъ 9 значащихъ цифръ по 3; слѣд., оно равно $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

3°. Сколько можно образовать цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое выражалось бы тремя различными цифрами?

Изъ 10 цифръ можно составить размѣщеній по три: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$; но изъ этого числа надо исключить число тѣхъ размѣщеній по три, которыя начинаются съ цифры 0; такихъ

размѣщеніи будетъ столько, сколько можно составить размѣщеній по 2 изъ 9 значащихъ цифръ, т.-е. $9 \cdot 8 = 72$; слѣдовательно, искомое число $= 720 \cdot 72 = 648$.

326. Перестановки. Перестановками изъ данныхъ m элементовъ наз. такія соединенія, изъ которыхъ каждое содержитъ все m элементовъ и которыя отличаются одно отъ другого только порядкомъ ихъ. Напримѣръ, перестановки изъ трехъ элементовъ a, b и c будутъ такія соединенія: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Изъ этого опредѣленія видно, что перестановки представляютъ собою частный случай размѣщеній, а именно: перестановки изъ m элементовъ суть размѣщенія изъ m элементовъ по m .

Число всевозможныхъ перестановокъ изъ m элементовъ обозначается символомъ P_m (здѣсь P есть начальная буква слова permutation).

Такъ какъ $P_m = A_m^m$, то формула перестановокъ есть слѣдующая:

$$P_m = m(m-1)(m-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)m,$$

т.-е. число всевозможныхъ перестановокъ изъ m элементовъ равно произведенію натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m^1 .

Примѣры. 1°. Сколько девятизначныхъ чиселъ можно написать девятью разными значащими цифрами?

Искомое число есть $P_9 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$.

2°. Сколькими способами можно размѣстить 12 лицъ за столомъ, на которомъ поставлено 12 приборовъ?

Число способовъ $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 12 = 479001600$.

¹⁾ Произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m включительно обозначается иногда сокращенно такъ: $m!$ Численная величина этого произведенія растетъ чрезвычайно быстро съ возрастаніемъ m ; такъ, при $m=10$ это произведеніе даегъ 3628800, при $m=100$ оно выражается числомъ, требующимъ 158 цифръ для своего изображенія.

327. Сочетанія. Сочетаніями изъ данныхъ m элементовъ по n ($n \leq m$) наз. такія соединенія, изъ которыхъ каждое содержитъ n элементовъ, взятыхъ изъ данныхъ m элементовъ, и которыя отличаются одно отъ другого по крайней мѣрѣ однимъ элементомъ.

Напримѣръ, изъ 4 элементовъ a, b, c и d сочетанія по 3 будутъ:

$$abc, abd, acd, bcd.$$

Сочетанія изъ m элементовъ могутъ быть: по 1, по 2, по 3... и, наконецъ, по m (въ послѣднемъ случаѣ получается только одно сочетаніе).

Изъ опредѣленія видно, что сочетанія представляютъ собою тѣ размѣщенія, которыя отличаются одно отъ другого элементами. Это обстоятельство позволяетъ найти число всѣхъ сочетаній изъ m элем. по n , обозначаемое символомъ C_m^n (здѣсь C есть начальная буква слова combination). Въ самомъ дѣлѣ, если, найдя всѣ сочетанія изъ m элем. по n , мы сдѣлаемъ въ каждомъ изъ нихъ всевозможныя перестановки, то получимъ всѣ размѣщенія изъ m элем. по n . Напримѣръ, сдѣлавъ въ каждомъ изъ написанныхъ выше сочетаній изъ 4 элем. по 3 всевозможныя перестановки, получимъ всевозможныя размѣщенія изъ 4 элементовъ по 3:

$$\begin{array}{c|c|c|c} abc & abd & acd & bcd \\ acb & adb & adc & bdc \\ bac & bad & cad & cbd \\ bca & bda & cda & cdb \\ cab & dab & dac & dbc \\ cba & dba & dca & dcb \end{array}$$

Дѣйствительно, во-первыхъ, эти соединенія суть различныя размѣщенія, такъ какъ они отличаются одно отъ другого или порядкомъ элементовъ, или самими элементами; во-вторыхъ, въ этихъ соединеніяхъ должны встрѣтиться всѣ размѣщенія изъ 4 элементовъ по 3, такъ какъ, если бы могло быть размѣщеніе, не встрѣчающееся въ полученныхъ соедине-

ныхъ, то оно отличалось бы отъ нихъ или порядкомъ, или элементами; если порядкомъ, то это значило бы, что мы не сдѣляли всевозможныхъ перестановокъ; если элементами, то это значило бы, что мы не сдѣляли всевозможныхъ сочетаній.

Изъ этого слѣдуетъ, что число всѣхъ размѣщеній изъ m элем. по n равно числу всѣхъ сочетаній изъ m элем. по n , умноженному на число всѣхъ перестановокъ, какія можно сдѣлать изъ n элементовъ; другими словами:

$$A_m^n = C_m^n \cdot P_n.$$

Отсюда выводимъ слѣдующую формулу сочетаній:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1 \dots m-(n-1))}{1.2.3\dots n} \quad (1)$$

Такимъ образомъ, $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$, $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$, и т. д.

Примѣры. 1°. Изъ 10 кандидатовъ на одну и ту же должность должны быть выбраны трое. Сколько можетъ быть разныхъ случаевъ?

Искомое число, очевидно, представляетъ число всевозможныхъ сочетаній изъ 10 элементовъ по 3, т.-е.

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

2°. Сколькими способами можно выбрать 13 картъ изъ колоды въ 52 карты?

Искомое число представляетъ собой число сочетаній изъ 52 по 13, т.-е.

$$C_{52}^{13} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \dots 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 13} = 635\ 013\ 559\ 600.$$

328. Другой видъ формулы сочетаній. Формула (1) можно дать иной видъ, если умножимъ числителя и знаменателя ея на произведение: $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-n)$; тогда въ числитель получимъ произведение натуральныхъ чиселъ

отъ 1 до m , а въ знаменателѣ—произведение натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n , умноженное на произведение натуральныхъ чиселъ отъ 1 до $m-n$:

$$C_m^n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-n)} = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}}. \quad (2)$$

329. Свойство сочетаній. Замѣняя въ формулѣ (2) n на $m-n$, получаемъ:

$$C_m^{m-n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-n) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \frac{P_m}{P^{m-n} P^n}.$$

Сравнивая эту формулу со (2), находимъ:

$$C_m^n = C_m^{m-n},$$

т. е. число сочетаній изъ m элементовъ по n равно числу сочетаній изъ m элементовъ по $m-n$.

Къ этому выводу приводитъ и такое простое рассужденіе: если изъ m элементовъ отберемъ какіе-нибудь n , чтобы составить изъ нихъ одно сочетаніе, то совокупность оставшихся элементовъ составитъ одно сочетаніе изъ $m-n$ элементовъ. Такимъ образомъ, каждому сочетанію, состоящему изъ n элементовъ, соответствуетъ одно сочетаніе изъ $m-n$ элементовъ, и наоборотъ; отсюда слѣдуетъ, что $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Выведенное соотношеніе позволяетъ упростить нахожденіе числа сочетаній изъ m элементовъ по n , когда n превосходитъ $\frac{1}{2} m$. Напримѣръ:

$$C_{100}^{97} = C_{100}^3 = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161700.$$

Замѣчаніе. Такъ какъ C_m^n есть число цѣлое, то формула (1) показываетъ, что произведеніе n послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится на произведеніе n первыхъ натуральныхъ чиселъ.

Г Л А В А П.

Биномъ Ньютона.

330. Предварительное замѣчаніе. Въ этой главѣ мы ставимъ цѣлью преобразовать степень бинома $(a+b)^m$, въ которой показатель m есть число цѣлое и положительное, въ многочленъ, расположенный по степенямъ буквъ a и b (частные случаи такого преобразованія мы имѣли уже въ формулахъ: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$). Для этого предварительно найдемъ произведение m биномовъ: $x+a$, $x+b$, $x+c, \dots$, въ которыхъ первые членъ одинаковы (мы ихъ обозначимъ буквою x), а вторые члены разные: a , b , c, \dots и т. д. Найдя такое произведеніе, мы затѣмъ предположимъ, что и вторые членъ одинаковы, т. е. $a=b=c=\dots$

331. Произведеніе биномовъ, отличающихся только вторыми членами. Обыкновеннымъ умноженіемъ находимъ:

$$\begin{aligned} (x+a)(x+b) &= x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab; \\ (x+a)(x+b)(x+c) &= [x^2 + (a+b)x + ab](x+c) = \\ &= x^3 + (a+b)x^2 + abx + cx^2 + (ac+bc)x + abc = \\ &= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc. \end{aligned}$$

Подобно этому найдемъ:

$$\begin{aligned} (x+a)(x+b)(x+c)(x+d) &= x^4 + (a+b+c+d)x^3 + \\ &+ (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + (abc+abd+acd+bcd)x + abcd. \end{aligned}$$

Разсматривая получившіяся произведенія, замѣчаемъ, что всѣ они составлены по одному и тому же закону, а именно:

Произведеніе представляетъ многочленъ, расположенный по убывающимъ степенямъ буквы x .

Показатель перваго члена равенъ числу перемножаемыхъ биномовъ; показатель при x въ слѣдующихъ членахъ постепенно убываютъ на 1; послѣдній членъ не содержитъ x .

Коэффициентъ 1-го члена есть 1; коэффициентъ 2-го члена есть сумма всѣхъ вторыхъ членовъ перемножаемыхъ биномовъ;

коэффициентъ 3-го члена есть сумма произведений вторыхъ членовъ, взятыхъ по два; коэффициентъ 4-го члена есть сумма произведений вторыхъ членовъ, взятыхъ по три.

Последній членъ есть произведение всѣхъ вторыхъ членовъ.

Докажемъ, что этотъ законъ применимъ къ произведенію какого угодно числа биномовъ. Для этого предварительно убѣдимся, что если онъ вѣренъ для произведенія m биномовъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c) \dots (x+k),$$

то будетъ вѣренъ и для произведенія $m+1$ биномовъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c) \dots (x+k)(x+l).$$

Итакъ, допустимъ, что вѣрно слѣдующее равенство:

$$(x+a)(x+b)(x+c) \dots (x+k) = x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \dots + S_m,$$

гдѣ S_1 означаетъ сумму всѣхъ вторыхъ членовъ, S_2 —сумму произведений изъ всѣхъ вторыхъ членовъ, взятыхъ по два, S_3 —сумму произведений изъ всѣхъ вторыхъ членовъ, взятыхъ по три, и т. д.; наконецъ, S_m есть произведение всѣхъ вторыхъ членовъ.

Умноживъ обѣ части этого равенства на биномъ $x+l$, найдемъ:

$$\begin{aligned} (x+a)(x+b)\dots(x+k)(x+l) &= (x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \dots + S_m)(x+l) = \\ &= x^{m+1} + S_1 x^m + S_2 x^{m-1} + \dots + S_m x + lx^m + lS_1 x^{m-1} + \dots + lS_{m-1} x + lS_m = \\ &= x^{m+1} + (S_1 + l)x^m + (S_2 + lS_1)x^{m-1} + \dots + (S_m + lS_{m-1})x + lS_m. \end{aligned}$$

Разсматривая это новое произведение, убѣждаемся, что оно подчиняется такому же закону, какой мы предположили вѣрнымъ для m биномовъ. Дѣйствительно: во-1-хъ) этому закону слѣдуютъ показатели буквы x ; во-2-хъ) коэффициентъ 2-го члена $S_1 + l$ представляетъ сумму всѣхъ вторыхъ членовъ перемножаемыхъ биномовъ, включая сюда и l ; коэффициентъ 3-го члена $S_2 + lS_1$ есть сумма парныхъ произведений всѣхъ вторыхъ членовъ, включая сюда и l , и т. д.; наконецъ, lS_m есть произведение всѣхъ вторыхъ членовъ: a, b, c, \dots, k, l .

Мы выше видѣли, что разсматриваемый законъ вѣренъ для 4 биномовъ; слѣд., по доказанному теперь, онъ вѣренъ для

4+1, т.-е. для 5 биномовъ; если же опъ вѣреть для 5 биномовъ, то опъ вѣреть и для 6 биномовъ, и т. д.

Изложенное разсужденіе представляетъ такъ называемое «доказательство отъ m къ $m+1$ ». Оно часто употребляется для показанія общности какого-нибудь правила или свойства ¹⁾.

332. Формула бинорма Ньютона и ея свойства.

Предположимъ, что въ доказанномъ нами равенствѣ:

$(x+a)(x+b) \dots (x+k) = x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + S_3 x^{m-3} + \dots + S_m$
 всѣ вторые члены биномовъ одинаковы, т.-е. $a=b=c=\dots=k$.

Тогда лѣвая часть его будетъ степень бинорма $(x+a)^m$. Посмотримъ, во что обратятся коэффициенты S_1, S_2, \dots, S_m .

Коэффициентъ S_1 , равный $a+b+c+\dots+k$, обратится въ ma . Коэффициентъ S_2 , равный $ab+ac+ad+\dots$, обратится въ a^2 , повторенное столько разъ, сколько можно составить сочетаній

изъ m элементовъ по два, т.-е. онъ обратится въ $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2$.

Коэффициентъ S_3 , равный $abc+abd+\dots$, обратится въ a^3 , повторенное столько разъ, сколько можно составить сочетаній

изъ m элементовъ по 3, т.-е. въ $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3$, и т. д.

Наконецъ, коэффициентъ S_m , равный $abc\dots k$, обратится въ a^m .

Такимъ образомъ, мы получимъ:

$$\begin{aligned} (x+a)^m = & x^m + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \dots \\ & \dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} a^n x^{m-n} + \dots + a^m. \end{aligned}$$

Это равенство извѣстно подъ именемъ формулы би-

¹⁾ Это доказательство наз. также „математической индукціей“ или „совершенной индукціей“. Замѣтимъ, что въ предыдущихъ главахъ этого учебника неоднократно представлялся случай признать доказательство отъ m къ $m+1$ (напр., при выводѣ формулы квадрата многочлена, § 158, формулы для любого члена прогрессии, §§ 287 и 292, формулы сложныхъ процентовъ, § 318, и др.). Мы этого не дѣлали только ради простоты изложенія

нома Ньютона (или просто бинома Ньютона)¹⁾. Рассмотрим особенности многочлена, стоящаго въ правой части формулы (называемаго разложениемъ бинома):

1) Показатели буквы x постепенно уменьшаются на 1 отъ перваго члена къ послѣднему, при чемъ въ первомъ членѣ показатель x равенъ показателю степени бинома, а въ послѣднемъ онъ есть 0; наоборотъ, показатели a постепенно увеличиваются на 1 отъ перваго члена къ послѣднему, при чемъ въ первомъ членѣ показатель при a есть 0, а въ послѣднемъ онъ равенъ показателю степени бинома. Вслѣдствіи этого сумма показателей при x и a въ каждомъ членѣ равна показателю степени бинома.

2) Число всѣхъ членовъ разложенія есть $m+1$, такъ какъ разложеніе содержитъ всѣ послѣдовательныя степени a отъ 0 до m включительно.

3) Коэффициентъ 1-го члена равенъ 1; коэффициентъ 2-го члена есть показатель степени бинома; коэффициентъ 3-го члена представляетъ число сочетаній изъ m элементовъ по 2; коэффициентъ 4-го члена—число сочетаній изъ m элем. по 3; вообще, коэффициентъ $(n+1)$ -го члена есть число сочетаній изъ m элементовъ по n . Наконецъ, коэффициентъ послѣдняго члена равенъ числу сочетаній изъ m элементовъ по m , т.-е. 1.

Замѣтимъ, что всѣ эти коэффициенты наз. бинomialными коэффициентами.

4) Обозначая каждый членъ разложенія буквою T съ цифрою влнзу, указывающею мѣсто этого члена въ разложеніи, т.-е. первый членъ T_1 , второй членъ T_2 и т. д., мы можемъ написать:

$$T_{n+1} = C_m^n a^n x^{m-n} = \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1.2.3\dots n} a^n x^{m-n}.$$

Эта формула представляетъ собою общій членъ разложенія,

¹ Исаакъ Ньютонъ, знаменитый англійскій математикъ, жилъ отъ 1642 г по 1727 г. Формула бинома не только для m цѣлаго положительнаго, но и для отрицательнаго и дробнаго, была имъ указана около 1665 г. Однако строгаго доказательства ея онъ не далъ. Для цѣлыхъ положительныхъ показателей формула была впервые доказана Яковомъ Бернуллі (1654—1705) съ помощью теоріи соединеній.

потому что изъ нея мы можемъ получить всѣ члены (кромѣ перваго), подставляя на мѣсто n числа: 1, 2, 3... m .

б) Коэффициентъ 1-го члена отъ начала разложенія равенъ 1, коэффициентъ 1-го члена отъ конца есть C_m^m , т.-е. тоже 1. Коэффициентъ 2-го члена отъ начала есть m ; т.-е. C_m^1 , коэффициентъ 2-го члена отъ конца есть C_m^{m-1} ; но $C_m^1 = C_m^{m-1}$ (§ 329); коэффициентъ 3-го члена отъ начала есть C_m^2 , а 3-го члена отъ конца есть C_m^{m-2} ; но $C_m^2 = C_m^{m-2}$, и т. д. ¹⁾. Значитъ, коэффициенты членовъ, одинаково удаленныхъ отъ концовъ разложенія, равны между собою.

б) Разсматривая биномиальные коэффициенты:

$$1, m, \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots$$

замѣчаемъ, что при переходѣ отъ одного коэффициента къ слѣдующему числитель умножается на числа все меньшія и меньшія (на $m-1$, на $m-2$, на $m-3$, и т. д.), а знаменатели умножаются на числа все бѣльшія и бѣльшія (на 2, на 3, на 4, и т. д.). Вслѣдствіе этого коэффициенты сначала возрастаютъ (пока множители въ числитель остаются бѣльшими соответственныхъ множителей въ знаменателѣ), а затѣмъ убываютъ. Такъ какъ коэффициенты членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ строки, одинаковы, то членъ съ наибольшимъ коэффициентомъ находится посрединѣ разложенія. При этомъ надо различать два случая: первый, когда показатель бинорма число четное, и второй, когда онъ число нечетное. Въ первомъ случаѣ число всѣхъ членовъ разложенія нечетное; тогда посрединѣ будетъ одинъ членъ съ наибольшимъ коэффициентомъ. Во второмъ случаѣ число всѣхъ членовъ четное, и такъ какъ коэффициенты членовъ, одинаково удаленныхъ отъ концовъ разложенія, одинаковы, то посрединѣ должны быть два члена съ одинаковыми наибольшими коэффициентами.

¹⁾ Вообще, у $(n+1)$ го члена отъ начала коэффициентъ есть $C_m^{n \cdot (n+1)}$ -й членъ отъ конца занимаетъ отъ начала ряда мѣсто $(m+1) - (n+1) + 1 = m - n + 1$; поэтому его коэффициентъ есть C_m^{m-n} ; но $C_m^n = C_m^{m-n}$; слѣд., коэффициенты у этихъ членовъ одинаковы.

Примѣры: 1) $(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$;
 2) $(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$.

7) Изъ сравненія двухъ рядомъ стоящихъ членовъ:

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} a^n x^{m-n},$$

$$T_{n+2} = \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)](m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)} a^{n+1} x^{m-n-1},$$

слѣдуетъ: чтобы получить коэффициентъ слѣдующаго члена, достаточно коэффициентъ предыдущаго члена умножить на показателя буквы x въ этомъ членѣ и раздѣлить на число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.

Это свойство коэффициентовъ значительно облегчаетъ разложение; такъ, пользуясь имъ, можемъ сразу писать:

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + \dots$$

Написавъ члены до середины ряда, остальные получимъ основываясь на свойствѣ 5-мъ:

$$\dots + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$$

8) Сумма всѣхъ биноміальныхъ коэффициентовъ равна 2^m . Дѣйствительно, положивъ въ формулѣ бинома $x=a=1$, получимъ:

$$2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + 1.$$

9) Заменявъ въ формулѣ бинома Ньютона a на $-a$, получимъ:

$$(x-a)^m = x^m + m(-a)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(-a)^2x^{m-2} + \dots + (-a)^m$$

т. е. $(x-a)^m = x^m - m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} - \dots + (-1)^m a^m,$

и, слѣд., въ разложеніи $(x-a)^m$ знаки $+$ и $-$ чередуются.

10) Положивъ въ последнемъ равенствѣ $x=a=1$, находимъ:

$$0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + (-1)^m,$$

т. е. сумма биноміальныхъ коэффициентовъ, стоящихъ на не-

четныхъ мѣстахъ, равна суммѣ бинаміальныхъ коэффициентовъ, стоящихъ на четныхъ мѣстахъ.

333. Практическій приемъ. Когда x и a означаютъ какія-либо сложныя алгебраическія выраженія, то, для удобства примѣненія формулы бинома, обыкновенно поступаютъ такъ: пишутъ въ одной строкѣ коэффициенты разложенія; подъ ними, въ другой строкѣ, соответствующія степени x , т.-е. $x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, \dots, 1$ (ихъ удобнѣе писать, начиная съ конца); подъ ними, въ третьей строкѣ, соответствующія степени a , т.-е. $1, a, a^2, a^3, \dots, a^m$, затѣмъ перемножаютъ соответственные члены трехъ строкъ и полученные произведенія соединяютъ знакомъ $+$, если было дано $(x+a)^m$, и попеременно знаками $+$ и $-$, если было дано $(x-a)^m$.

Для примѣра отыщемъ разложеніе $(4a^2x^3 - 3b)^4$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 256a^8x^{12} & 64a^6x^9 & 16a^4x^6 & 4a^2x^3 & 1 \\ 1 & 3b & 9b^2 & 27b^3 & 81b^4 \\ \hline 256a^8x^{12} - 768a^6bx^9 + 864a^4b^2x^6 - 432a^2b^3x^3 + 81b^4. \end{array}$$

334. Примѣненіе формулы бинома къ многочлену. Формула бинома Ньютона позволяетъ возвышать въ степень трехчленъ и вообще многочленъ. Такъ:

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 4c(a+b) + 4c^2(a+b) + 4c^3(a+b) + c^4.$$

Разложивъ $(a+b)^2, (a+b)^3, (a+b)^4$, окончательно получимъ:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^3c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4.$$

335. Сумма одинаковыхъ степеней членовъ арифметической прогрессіи. Укажемъ одно изъ интересныхъ примѣненій формулы бинома. Пусть имѣемъ арифметическую прогрессию, содержащую $n+1$ членовъ:

$$- a, b, c, \dots, k, l.$$

Если разность ея d , то $b=a+d, c=b+d, \dots, l=k+d$. Возвысивъ эти равенства по формулѣ бинома Ньютона въ $m+1$ степень, получимъ n слѣдующихъ равенствъ:

$$b^{m+1} = (a+d)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)a^m d + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} a^{m-1} d^2 + \dots + d^{m+1},$$

$$c^{m+1} = (b+d)^{m+1} = b^{m+1} + (m+1)b^m d + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} b^{m-1} d^2 + \dots + d^{m+1},$$

.....

$$l^{m+1} = (k+d)^{m+1} = k^{m+1} + (m+1)k^m d + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} k^{m-1} d^2 + \dots + d^{m+1},$$

Сложивъ эти равенства и положивъ для краткости:

$$S_m = a^m + b^m + c^m + \dots + k^m,$$

$$S_{m-1} = a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} + \dots + k^{m-1},$$

.....

$$S_1 = a + b + c + \dots + k,$$

получимъ (члены: b^{m+1} , k^{m+1} сократятся):

$$j^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)dS_m + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} a^2 S_{m-1} + \dots + na^{m+1}.$$

Изъ этого уравненія опредѣлимъ S_m , если извѣстны S_{m-1} , S_{m-2} , ..., S_1 . Полагая послѣдовательно $m=1, 2, 3, \dots$, найдемъ S_1 , потомъ S_2 , затѣмъ S_3 , и т. д.

336. Сумма одинаковыхъ степеней чиселъ натурального ряда. Примѣнивъ выведенное въ предыдущемъ параграфѣ уравненіе къ прогрессіи:

$$\div 1, 2, 3, 4, \dots, n, n+1,$$

получимъ:

$$(n+1)^{m+1} = 1 + (m+1)S_m + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} S_{m-1} + \dots + n$$

Полагая $m=1$, найдемъ:

$$(n+1)^2 = 1 + 2S_1 + n; \text{ откуда: } S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

При $m=2$ получимъ:

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 2S_1 + n = 1 + 3S_2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n,$$

откуда:
$$S_2 = \frac{(n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}}{3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + n + n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{3} = S_1 \cdot \frac{2n+1}{3}.$$

При $m=3$ находимъ:

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n = 1 + 4S_3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n,$$

откуда:
$$S_3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = S_1^2.$$

Подобнымъ же образомъ можно было бы найти S_4 , S_5 и т. д. Формулы для $m=1, 2, 3$ полезно запомнить:

1°. Сумма S_1 первыхъ степеней $= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$

2°. Сумма S_2 квадратовъ $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = (1 + 2 + \dots + n) \cdot \frac{2n+1}{3}.$

3°. Сумма S_3 кубовъ $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = S_1^2.$

ГЛАВА III.

Непрерывныя дроби.

337. Определеііе. Непрерывною или цѣпною дробью называется дробь вида:

$$a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \text{ или короче: } a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

гдѣ цѣлое число a складывается съ дробью, у которой числитель есть 1, а знаменатель цѣлое число a_1 , сложенное съ дробью, у которой числитель есть 1, а знаменатель цѣлое число a_2 , сложенное съ дробью, и т. д. (всѣ цѣлыя числа предполагаются положительными, число a можетъ быть 0).

Дроби: $\frac{a}{1}, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}$ и т. д. наз. составляющими дробями или звеньями. Непрерывная дробь наз. конечною или бесконечною, смотря по тому, будетъ ли у нея число звеньевъ конечное или бесконечное. Мы будемъ разсматривать сначала только дроби конечныя.

Написанную выше непрерывную дробь сокращенно изображаютъ такъ:

$$(a, a_1, a_2, a_3 \dots).$$

Напримѣръ, дроби: $3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$ и $\frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{17}}}$

сокращенно изображаются: (3, 2, 1, 3) и (0, 2, 1, 17).

338. Теорема. Всякую конечную непрерывную дробь можно обратить въ равную ей обыкновенную.

До к. Непрерывная дробь представляетъ собою рядъ ариѳметическихъ дѣйствій надъ цѣлыми и дробными числами, а именно:

сложения (указывается знакомь +) и дѣленія (указывается горизонтальной чертой); если данная непрерывная дробь конечная, то число этихъ дѣйствій конечно, и мы можемъ ихъ выполнить. Въ результатѣ получимъ обыкновенную дробь. Пусть, напр., имѣемъ такую непрерывную дробь:

$$(2, 3, 1, 4) = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}$$

Производимъ указанныя дѣйствія:

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \quad 1 : \frac{5}{4} = \frac{4}{5}, \quad 3 + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}, \quad 1 : \frac{19}{5} = \frac{5}{19}, \quad 2 + \frac{5}{19} = \frac{43}{19}$$

Это и есть обыкновенная дробь, равная данной непрерывной.

339. Обратная теорема. Всякую положительную обыкновенную дробь можно обратить (развернуть) въ равную ей конечную непрерывную.

Д о к. Пусть дана обыкновенная положительная дробь $\frac{A}{B}$.

Исключивъ изъ нея цѣлое число, получимъ:

$$\frac{A}{B} = a + \frac{r}{B},$$

гдѣ a есть цѣлое частное, а r остатокъ отъ дѣленія A на B (если дробь $\frac{A}{B}$ правильная, то $a=0$ и $r=A$).

Раздѣливъ оба члена дроби $\frac{r}{B}$ на r , получимъ:

$$\frac{r}{B} = \frac{1}{B:r} = \frac{1}{a_2 + \frac{r_1}{r}},$$

гдѣ a_2 есть цѣлое частное, а r_1 остатокъ отъ дѣленія B на r .

Раздѣливъ оба члена дроби $\frac{r_1}{r}$ на r_1 , получимъ:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{1}{r:r_1} = \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}},$$

гдѣ a_2 есть цѣлое частное, а r_2 остатокъ отъ дѣленія r на r_1 . Продолжая этотъ приемъ далѣе, будемъ послѣдовательно получать:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{r_1 : r_2} = \frac{1}{a_2 + \frac{r_3}{r_2}}, \quad \frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{r_2 : r_3} = \frac{1}{a_3 + \frac{r_4}{r_3}}, \text{ и т. д.}$$

Такъ какъ $B > r > r_1 > r_2 > r_3 \dots$ и эти числа все цѣлыя, то, продолживъ этотъ приемъ достаточно далеко, мы дойдемъ, очевидно, до нѣкотораго остатка, который будетъ равенъ 0.

$$\text{Пусть } r_n = 0, \text{ т.-е. } \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \frac{1}{a_n}.$$

Тогда, путемъ подстановки, мы получимъ конечную непрерывную дробь, равную данной обыкновенной:

$$\frac{A}{B} = a + \frac{r}{B} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r}} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Замѣчаніе. Изъ рассмотрѣнія этого приема слѣдуетъ, что числа a, a_1, a_2, \dots, a_n суть цѣлыя частныя, получаемыя при послѣдовательномъ дѣленіи A на B , потомъ B на первый остатокъ, перваго остатка на второй, и т. д. (иначе сказать, это суть цѣлыя частныя, получаемыя при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ A и B способомъ послѣдовательнаго дѣленія). Вслѣдствіе этого числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ наз. частными и непрерывной дробі.

Примѣры.

1) Обратить въ непрерывную дробь число $\frac{40}{17}$.

Такъ какъ

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 17} \\ \underline{17} \\ 68 \\ \underline{68} \\ 0 \end{array}$$

то

$$\frac{40}{17} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$$

Сравнив третью подходящую дробь съ двумя первыми, замѣтимъ, что числитель третьей подходящей дроби получится, если числителя второй подходящей дроби умножимъ на соответствующее частное (т.-е. на a_2) и къ полученному произведенію приложимъ числителя первой подходящей дроби; знаменатель третьей подходящей дроби получится подобнымъ же образомъ изъ знаменателей предыдущихъ двухъ подходящихъ дробей.

Докажемъ, что этотъ законъ применимъ ко всякой подходящей дроби, слѣдующей за второй.

Теорема Чтобы получить числителя $(n+1)$ -й подходящей дроби, достаточно числителя n -й подходящей дроби умножить на соответствующее частное (т.-е. на a_n) и къ произведенію приложить числителя $(n-1)$ -й подходящей дроби. Знаменатель $(n+1)$ -й подходящей дроби подобнымъ же способомъ получается изъ знаменателей n -й и $(n-1)$ -й подходящихъ дробей.

Употребимъ доказательство отъ n къ $(n+1)$, т.-е. докажемъ, что если эта теорема применима къ n -й подходящей дроби, то она применима и къ $(n+1)$ -й подходящей дроби.

Обозначимъ 1-ю, 2-ю, 3-ю, и т. д. подходящія дроби послѣдовательно такъ:

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3} \dots \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \dots$$

и замѣтимъ, что соответствующія имъ частныя будутъ:

$$a, a_1, a_2 \dots a_{n-2}, a_{n-1} \quad a_n \dots$$

Допустимъ, что вѣрны равенства:

$$P_n = P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}, \quad Q_n = Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2} \quad (1)$$

и, слѣдовательно,
$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}} \quad (2)$$

Докажемъ, что въ такомъ случаѣ будетъ вѣрно равенство:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}} \quad (3)$$

Изъ сравненія двухъ подходящихъ дробей:

$$\frac{P_n}{Q_n} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}}} \quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

усматриваемъ, что $(n+1)$ -я подходящая дробь получится изъ n -й, если въ последней замѣнимъ число a_{n-1} на сумму $a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$.

Поэтому равенство [2] даетъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1} \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right) + P_{n-2}}{Q_{n-1} \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right) + Q_{n-2}}$$

Раскрывъ скобки и умноживъ оба члена дроби на a_n , получимъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1} a_{n-1} a_n + P_{n-1} + P_{n-2} a_n}{Q_{n-1} a_{n-1} a_n + Q_{n-1} + Q_{n-2} a_n} = \frac{(P_{n-1} a_{n-1} + P_{n-2}) a_n + P_{n-1}}{(Q_{n-1} a_{n-1} + Q_{n-2}) a_n + Q_{n-1}}$$

Принявъ во вниманіе равенства (1), можемъ окончательно написать:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}$$

Это и есть равенство (3), которое требовалось доказать.

Такимъ образомъ, если доказываемый законъ вѣренъ для n -й подходящей дроби, то онъ будетъ вѣренъ и для $(n+1)$ -й подходящей дроби. Но мы видѣли, что онъ вѣренъ для 3-й подходящей дроби; слѣд., по доказанному, онъ примѣнимъ для 4-й подходящей дроби, а если для 4-й, то и для 5-й, и т. д.

Примѣръ. Составимъ всѣ подходящія дроби для слѣдующей непрерывной:

$$a = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}}} = (2, 1, 3, 2, 3, 1, 5).$$

Вычисленіе всего удобнѣе расположить такъ:

Цѣлыя частныя:	3	2	3	1	5		
Подход. дроби:	2	3	11	25	86	111	641
	1	1	4	9	31	40	231

Первыя двѣ подходящія дроби найдемъ непосредственно; это будутъ: $\frac{2}{1}$ и $\frac{3}{1}$. Остальныя дроби получимъ, основываясь на доказанномъ законѣ. Для памяти размѣщаемъ въ верхней строкѣ цѣлыя частныя, съ 3-го до послѣдняго.

342. Теорема. Точная величина конечной непрерывной дроби заключается между великими двумя послѣдовательными подходящими дробями, при чемъ она ближе къ послѣдующей, чѣмъ къ предыдущей.

До к. Пусть имѣемъ конечную непрерывную дробь:

$$(a, a_1, a_2 \dots a_{n-1}, a_n, a_{n+1} \dots a_s) = A,$$

величину которой обозначимъ черезъ A . Возьмемъ какія-нибудь три послѣдовательныя подходящія дроби:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

По доказанному въ предыдущемъ параграфѣ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

Если въ правую часть этого равенства вмѣсто a_n вставимъ $y = (a_n, a_{n+1} \dots a_s)$, то получимъ точную величину A непрерывной дроби; значить:

$$A = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}},$$

откуда: $A Q_n y + A Q_{n-1} = P_n y + P_{n-1}$ или $A Q_n y - P_n y = P_{n-1} - A Q_{n-1}$

и, значить, $y Q_n \left(A - \frac{P_n}{Q_n} \right) = Q_{n-1} \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A \right)$.

Изъ послѣдняго равенства можемъ вывести два слѣдующихъ заключенія:

1) Такъ какъ числа y , Q_n и Q_{n-1} положительныя, то разности,

стоящая внутри скобокъ, должны быть одновременно положительны, или одновременно отрицательны, значить:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \text{если } A - \frac{P_n}{Q_n} > 0, \\ \text{то и } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A > 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{если } A - \frac{P_n}{Q_n} < 0, \\ \text{то и } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A < 0 \end{array} \right. \\ \text{т.-е.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{если } A > \frac{P_n}{Q_n}, \\ \text{то и } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > A \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{если } A < \frac{P_n}{Q_n}, \\ \text{то и } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < A. \end{array} \right. \end{array}$$

Слѣдовательно, величина A заключена между всякими двумя послѣдовательными подходящими дробями.

2) Такъ какъ $y > 1$ и $Q_n > Q_{n-1}$, при чемъ числа Q_n и Q_{n-1} положительныя, то изъ того же равенства выводимъ:

$$\text{абс. вел.} \left(A - \frac{P_n}{Q_n} \right) < \text{абс. вел.} \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A \right).$$

Отсюда слѣдуетъ, что A ближе къ $\frac{P_n}{Q_n}$, чѣмъ къ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Такъ какъ, очевидно, $A > a$, т.-е. $A > \frac{P_1}{Q_1}$, то $A < \frac{P_2}{Q_2}$, $A > \frac{P_3}{Q_3}$, $A < \frac{P_4}{Q_4}$, и т. д.; т.-е. точная величина непрерывной дроби болѣе всякой подходящей дроби нечетнаго порядка и менѣе всякой подходящей дроби четнаго порядка.

§43. Теорема. Разность между всякими двумя рядомъ стоящими подходящими дробями равна единицѣ, взятой со знакомъ $+$ или $-$ и дѣленной на произведеніе знаменателей этихъ подходящихъ дробей.

$$\text{Д о к.} \quad \text{Такъ какъ} \quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n}{Q_{n+1}Q_n},$$

то очевидно, что знаменатель этой разности удовлетворяетъ требованію теоремы. Остается доказать, что числитель равенъ ± 1 .

Такъ какъ: $P_{n+1} = P_n a_n + P_{n-1}$ и $Q_{n+1} = Q_n a_n + Q_{n-1}$,

$$\begin{aligned} \text{то } P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n &= (P_n a_n + P_{n-1})Q_n - (Q_n a_n + Q_{n-1})P_n = \\ &= P_n a_n Q_n + P_{n-1}Q_n - Q_n a_n P_n - Q_{n-1}P_n = -(P_n Q_{n-1} - P_{n-1}Q_n). \end{aligned}$$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ, представляетъ собою числителя дроби, которая получится отъ вычитанія изъ $\frac{P_n}{Q_n}$ дроби

$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. Слѣд., мы доказали, что абсолютная величина числителя

дроби, получаемой отъ вычитанія $\frac{P_n}{Q_n}$ изъ $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, равна абсо-

лютной величинѣ числителя дроби, получаемой отъ вычитанія $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ изъ $\frac{P_n}{Q_n}$; другими словами, абсолютная величина числи-

теля дроби, получаемой отъ вычитанія одной изъ другой двухъ рядомъ стоящихъ подходящихъ дробей, есть число постоянное для всѣхъ подходящихъ дробей. Но разность между 2-й и 1-й подходящими дробями есть:

$$\left(a + \frac{1}{a_1}\right) - a = \frac{1}{a_1}.$$

Слѣд., числитель разности между всякими двумя рядомъ стоящими подходящими дробями, по абсолютной своей величинѣ, равенъ 1.

Такъ, если взять примѣръ, приведенный на стран. 413, то найдемъ:

$$\frac{3}{1} - \frac{2}{1} = \frac{1}{1}; \quad \frac{11}{4} - \frac{3}{1} = \frac{-1}{4}; \quad \frac{25}{9} - \frac{11}{4} = \frac{1}{36}; \quad \frac{86}{31} - \frac{25}{9} = \frac{-1}{279}, \text{ и т. п.}$$

Слѣдствія. I. Всякая подходящая дробь есть дробь несократимая, потому что если бы дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ могла быть сокращена на некотораго дѣлителя $m > 1$, то разность $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n$ дѣлилась бы на m , что невозможно, такъ какъ эта разность равна ± 1 .

II. Если вмѣстѣ точной величины непрерывной дроби возъ-

иметь подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, то едѣлаемъ ошибку, меньшую каждаго изъ трехъ слѣдующихъ чиселъ:

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}, \frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})}, \frac{1}{Q_n^2}.$$

Дѣйствительно, если A есть точная величина непрерывной дроби, то разность $A - \frac{P_n}{Q_n}$ численно меньше разности $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}$, абсолютная величина которой, по доказанному, равна $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$. Съ другой стороны, такъ какъ $Q_{n+1} = Q_n a_n + Q_{n-1}$, гдѣ $a_n \geq 1$, то $Q_{n+1} > Q_n + Q_{n-1}$; слѣд.,

$$Q_n Q_{n+1} > Q_n(Q_n + Q_{n-1}) \text{ и } \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})},$$

и потому абсол. величина разности $A - \frac{P_n}{Q_n}$ меньше $\frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})}$. Наконецъ, такъ какъ $Q_{n+1} > Q_n$, то $Q_{n+1} Q_n > Q_n^2$, и потому

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Слѣд., абсолютная величина разности $A - \frac{P_n}{Q_n}$ меньше $\frac{1}{Q_n^2}$.

Изъ трехъ указанныхъ предѣловъ погрѣшности самый меньшій есть $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$; но его вычисленіе предполагаетъ, что знаменатель подходящей дроби, слѣдующей за той, которую мы приняли за приближеніе, извѣстенъ, что не всегда имѣетъ мѣсто. Вычисленіе предѣла $\frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})}$ можетъ быть выполнено только тогда, когда извѣстенъ знаменатель предшествующей подходящей дроби. Когда же извѣстна одна подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, возможно только указаніе предѣла погрѣшности $\frac{1}{Q_n^2}$.

Напр., если мы знаемъ, что пѣкоторая подходящая дробь данной непрерывной есть $\frac{45}{17}$, то можно сказать, что $\frac{45}{17}$ точно до $\frac{1}{17^2} = \frac{1}{289}$. Если, кромѣ того, знаемъ, что знаменатель предшествующей подходящей дроби есть, напр., 8, то можемъ сказать, что $\frac{45}{17}$ точно до $\frac{1}{17(17+8)} = \frac{1}{425}$. Наконецъ, когда еще знаемъ, что знаменатель слѣдующей подходящей дроби есть, напр., 37, то можемъ ручаться, что $\frac{45}{17}$ разнится отъ точнаго значенія непрерывной дроби менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{17 \cdot 37} = \frac{1}{629}$.

344. Теорема. Подходящая дробь близка къ точной величинѣ непрерывной дроби, чѣмъ всякая другая дробь съ меньшимъ знаменателемъ.

Док. Допустимъ, что существуетъ дробь $\frac{a}{b}$, менѣе отличающаяся отъ точной величины непрерывной дроби A , чѣмъ подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, и пусть $b < Q_n$. Докажемъ, что это предположеніе невозможно. Такъ какъ $\frac{P_n}{Q_n}$ ближе къ A , чѣмъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, и $\frac{a}{b}$ ближе къ A , чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, то, и подавно, $\frac{a}{b}$ ближе къ A , чѣмъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; такъ какъ, кромѣ того, A заключается между $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, то абсолютная величина разности $\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ больше абсолютной величины разности $\frac{a}{b} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; значить, обращая вниманіе только на абсолютныя величины, можемъ написать:

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > \frac{aQ_{n-1} - bP_{n-1}}{bQ_{n-1}},$$

$$Q_n Q_{n-1} > bQ_{n-1}.$$

Перемноживъ почленно эти неравенства (беря только абсолютныя величины), по учимъ:

$$1 > aQ_{n-1} - bP_{n-1}.$$

Такъ какъ aQ_{n-1} и bP_{n-1} суть числа цѣлыя, то это неравенство возможно только при условии:

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = 0; \text{ откуда: } \frac{a}{b} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

Но это равенство невозможно, такъ какъ, по предположенію $\frac{a}{b}$ ближе подходитъ къ A , чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, тогда какъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ по доказанному (§ 342),

больше разнится отъ A , чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$. Невозможность равенства доказываетъ невозможность сдѣланнаго предположенія.

Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что подходящія дроби представляютъ простиѣйшіе виды приближеній къ точному значенію непрерывной дроби.

345. Обращеніе несоизмѣримаго числа въ безконечную непрерывную дробь Теорема I Всякое положительное несоизмѣримое число x можетъ быть представлено въ видѣ выраженія;

$$x = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{x_n}}}}} = (a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n),$$

въ которомъ буквы $a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ означаютъ числа цѣлыя положительныя (при чемъ a можетъ быть и 0) и которыхъ число n можетъ быть какъ угодно велико; буква же x означаетъ нѣкоторое положительное несоизмѣримое число, большее 1.

Док. Пусть наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x , есть a (если $x < 1$, то это цѣлое число равно 0). Тогда x можно выразить суммой $a + x'$, гдѣ x' есть нѣкоторое положительное несоизмѣримое число, меньшее 1. Введемъ новое число x_1 , связанное съ x' уравненіемъ: $x' = \frac{1}{x_1}$.

Тогда x_1 должно быть положительнымъ несоизмѣримымъ числомъ, большимъ 1, и мы будемъ имѣть:

$$x = a + \frac{1}{x_1}. \quad (1)$$

Преобразуя x_1 такъ, какъ было сейчасъ сдѣлано съ x , получимъ:

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad (2)$$

гдѣ a_1 есть наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x_1 (это число больше 0), а x_2 нѣкоторое несоизмѣримое число, большее 1. Въ свою очередь можемъ положить:

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} \quad (3) \qquad x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4} \quad (4)$$

и т. д. безъ конца (такъ какъ всегда будемъ приходиться къ положительному несоизмѣримому числу x_k , большому 1).

Ограничиваясь я такими равенствами и сдѣлавъ подстановки, найдемъ для x то выраженіе, которое требовалось доказать.

Такъ какъ число звеньевъ съ цѣлыми знаменателями: $a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ можно сдѣлать какъ угодно большимъ, то говорятъ, что всякое положительное несоизмѣримое число x обращается (развертывается) въ безконечную непрерывную дробь: $(a, a_1, a_2, a_3, \dots)$. Если примемъ еще во вни-

маніе теорему § 339, то можем теперь сказать, что **всякое положительное число обращается въ непрерывную дробь, конечную, если это число осонамѣримое, и безконечную, если оно несонамѣримое.**

Теорема 2. Всякое несонамѣримое число x можно разсматривать, какъ предѣлъ, къ которому стремится неограниченный рядъ подходящихъ дробей: $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots$, составленныхъ для безконечной непрерывной дроби, въ которую обращается это число x .

До к. Выраженіе $(a, a_1, a_2, a_{n-1}, a_n)$, выведенное нами для несонамѣримаго числа x , отличаеся отъ разсмотрѣнныхъ рѣше конечныхъ непрерывныхъ дробей только тѣмъ, что въ послѣднихъ во в знаменатели числа h и h_1 я, а въ эточъ выраженіи знаменатель a_n есть несонамѣримое число болѣе 1. Но, просматривая доказательства теоремъ §§ 341, 342 и 343, мы видимъ, что въ ничъ нигдѣ не требуется допущенія, чтобы знаменатели отдѣльныхъ звеньевъ были непременно цѣлыми; поэтому можемъ сказать, что теоремы эти применимы и къ выраженію, выведенному нами теперь для несонамѣримаго чиса x . Въ частности, напр., мы можемъ утверждать, что величина x заключаетса между каждыми двумя подходящими дробями, и что если вмѣсто точной величины x возьмемъ какую-нибудь подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, то одѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{Q_n^2}$. Такъ какъ $Q_n = Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}$ гдѣ всѣ числа Q и a не меньше 1, то при неограничномъ увеличеніи n число Q_n возрастаетъ неограниченно и, слѣд, дробь $\frac{1}{Q_n^2}$ уменьшается безпредѣльно; значить, абсолютная величина разности между постояннымъ числомъ x и переменнымъ числомъ $\frac{P_n}{Q_n}$ при достаточно большемъ n дѣлается (и при дальнѣйшемъ возрастаніи n остается) меньше любого положительнаго числа, какъ бы мало оно ни было. А это, согласно опредѣленію предѣла (§ 296), означаетъ, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = x$.

346. Периодическая непрерывная дробь. Такъ наз. безконечная непрерывная дробь, у которой частныя повторяются въ одной и той же послѣдовательности. Таковы, напр., дроби:

Чистая периодическая: Смѣшанная периодическая:

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

$$\frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

Точную величину периодической непрерывной дроби можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ.

Пусть намъ известно, что нѣкоторое несоизмѣримое число x даетъ безконечную непрерывную дробь

$$x = (a, a_1, a_2, \dots, a_n, a, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots).$$

Тогда, очевидно, можемъ написать:

$$x = (a, a_1, a_2, \dots, a_n, x).$$

Допустимъ теперь, что $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ есть та подходящая дробь, которая получится, если мы остановимся на послѣдней звенѣ перваго періода, а $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ двѣ предшествующія подходящія дроби. Очевидно, что точная величина данной непрерывной дроби получится изъ $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, если въ послѣдней на мѣсто a_n подставимъ сумму $a_n + \frac{1}{x}$.

Но
$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}; \text{ слѣд. } x = \frac{P_n \left(a_n + \frac{1}{x} \right) + P_{n-1}}{Q_n \left(a_n + \frac{1}{x} \right) + Q_{n-1}}$$

или
$$x = \frac{P_n a_n x + P_n + P_{n-1} x}{Q_n a_n x + Q_n + Q_{n-1} x} = \frac{(P_n a_n + P_{n-1})x + P_n}{(Q_n a_n + Q_{n-1})x + Q_n} = \frac{P_{n+1} x + P_n}{Q_{n+1} x + Q_n}.$$

Отсюда видно, что x есть корень квадратнаго уравненія:

$$Q_{n+1} x^2 + (Q_n - P_{n+1})x - P_n = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ вещественные корни, изъ нихъ только одинъ положительный; этотъ корень и есть значеніе данной періодической дроби.

Подобнымъ же образомъ можемъ опредѣлить точную величину смѣшанной періодической дроби. Пусть $x = (a, a_1, a_n, b, b_1, b_m, b_1, b_2, \dots, b_m, \dots)$, гдѣ періодъ образуютъ частныя: $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$. Тогда предварительно найдемъ $y = (b_1, b_2, \dots, b_m, b_1, b_2, \dots)$, какъ указали выше, послѣ чего x опредѣлимъ изъ равенства:

$$x = \frac{P_{n+1} y + P_n}{Q_{n+1} y + Q_n}.$$

Примѣръ. Найти величину періодической дроби:

$$x = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \dots}}}}}}$$

Опредѣлимъ сначала $y = 3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \dots}}} = 3 + \frac{1}{5 + y}$

$$y = 3 + \frac{y}{5y + 1} = \frac{15y + 3 + y}{5y + 1} = \frac{16y + 3}{5y + 1}.$$

Слѣд.

$$5y^2 - 15y - 3 = 0; y = \frac{15 + \sqrt{225 + 60}}{10} = \frac{15 + \sqrt{285}}{10}$$

$$x = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{y}{y+1}} = 2 + \frac{y+1}{3y+2} = \frac{7y+5}{3y+2};$$

$$x = \frac{7(15 + \sqrt{285}) + 50}{3(15 + \sqrt{285}) + 20} = \frac{155 + 7\sqrt{285}}{65 + 3\sqrt{285}} = \frac{409 - \sqrt{285}}{166}$$

ГЛАВА IV.

Нѣкоторыя приложенія непрерывныхъ дробей.

347 Приближенное значеніе данной ариѣметической дроби. Когда числитель и знаменатель данной несократимой ариѣметической дроби выражены большими числами, часто является потребность выразить эту дробь въ болѣе простомъ, хотя и приближенномъ, видѣ. Для этого достаточно обратить данную дробь въ непрерывную и цѣлти ту или другую подходящую дробь, смотря по желаемой степени приближенія.

Примѣръ. Зная, что число π , представляющее отношеніе окружности къ ея діаметру, заключено между двумя дробями: $a = 3,1415926$ и $b = 3,1415927$, найти простѣйшія приближенныя значенія π .

. Обративъ дроби a и b въ непрерывныя и взявъ только общія неполныя частныя, найдемъ:

$$\pi = (3, 7, 15, 1 \dots)^*.$$

*) Нельзя допустить, чтобы число π , заключающееся между a и b , будучи развѣ нуто въ непрерывную дробь, не сохранило бы какого-либо изъ тѣхъ частныхъ, которыя общія числамъ a и b . Дѣйствительно, если допустить, что какое-нибудь частное, напр., второе, было бы у числа π не 7, какъ у a и b , а меньше 7-и, напр 6, то тогда, сравнивъ два выраженія:

$$\pi = 3 + \frac{1}{6 + \dots} \qquad b = 3 + \frac{1}{7 + \dots}$$

и приравъ во вниманіе, что въ непрерывныхъ дробяхъ къ любому част-

Подходящія дроби будутъ:

		15	1
3	22	333	355
1	7	106	113

Приближеніе $\frac{22}{7}$ было найдено Архимедомъ; оно вѣрно до $\frac{1}{7 \cdot 106} = \frac{1}{742}$, значить, и подавно вѣрно до $\frac{1}{100}$. Число $\frac{355}{113}$ было указало Адрианомъ Меціемъ; взявъ это число вмѣсто π , сдѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{113 \cdot 33102} = \frac{1}{3740526}$, т.-е. во всякомъ случаѣ меньшую 1 миллионной.

Приближенія Архимеда и Меція, какъ четнаго порядка, болѣе π .

348 Извлеченіе квадратнаго корня. Пусть требуется найти $\sqrt{41}$ при помощи непрерывныхъ дробей. Разсуждаемъ такъ: наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\sqrt{41}$, есть 6; поэтому можемъ положить;

$$\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$\text{Откуда: } \frac{1}{x} = \sqrt{41} - 6; \quad x = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{\sqrt{41} + 6}{5}$$

Такъ какъ $\sqrt{41} + 6$ равняется 12 съ дробью, то наибольшее

тому прикладывается число, меньшее 1, мы получили бы слѣдующія неравенства:

$$6 + \dots < 7 + \dots; \quad \frac{1}{6 + \dots} > \frac{1}{7 + \dots}; \quad 3 + \frac{1}{6 + \dots} > 3 + \frac{1}{7 + \dots};$$

т.-е. $\pi > b$,

что противорѣчитъ заданію. Если допустить, что второе частное у числа π будетъ больше 7-и, напр. 8, то тогда, сравнявъ два выраженія:

$$\pi = 3 + \frac{1}{8 + \dots} \quad a = 3 + \frac{1}{7 + \dots}$$

мы нашли бы, подобно предыдущему, что $\pi < a$ что также противорѣчитъ заданію. Значить, второе частное должно быть 7. Также можно разъяснить, что и всѣ другія частныя, общія числамъ a и b , сохраняются и у числа π .

цѣлое число, заключающееся въ дроби $\frac{\sqrt{41}+6}{5}$, есть 2; поэтому можемъ положить:

$$x = \frac{\sqrt{41}+6}{5} = 2 + \frac{1}{y} \quad (2)$$

Откуда: $\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{41}+6}{5} - 2 = \frac{\sqrt{41}+4}{5}$.

$$y = \frac{5}{\sqrt{41}-4} = \frac{5(\sqrt{41}+4)}{25} = \frac{\sqrt{41}+4}{5}$$

Такъ какъ $\sqrt{41}+4$ равняется 10 съ дробью, то наибольшее цѣлое число, заключающееся въ дроби $\frac{\sqrt{41}+4}{5}$, есть 2; потому можемъ положить:

$$y = \frac{\sqrt{41}+4}{5} = 2 + \frac{1}{z} \quad (3)$$

Откуда: $\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{41}-6}{5}$; $z = \frac{5}{\sqrt{41}-6} = \frac{5(\sqrt{41}+6)}{5} = \sqrt{41}+6$.

Наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\sqrt{41}+6$, есть 12; поэтому можно положить:

$$z = \sqrt{41}+6 = 12 + \frac{1}{v} \quad (4)$$

Откуда: $\frac{1}{v} = \sqrt{41}-6$; $v = \frac{1}{\sqrt{41}-6}$.

Сравнивая выраженіе для v съ выраженіемъ для z , находимъ, что $v=z$. Пользуясь равенствами (1), (2), (3) и (4), получимъ:

$$\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{x}}}} = 6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \dots}}}}}}}$$

Такимъ образомъ, $\sqrt{41}$ выразился безконечною періодическою

непрерывною дробью, въ которой частныя 2, 2, 12 периодически повторяются¹⁾. Найдя подходящія дроби, получимъ приближенныя значенія $\sqrt{41}$:

		2	12	2	2	...
6	13	32	397	826	2049	...
1	2	5	62	129	320	...

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$\sqrt{12} = (3, \underbrace{1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, \dots}_{\text{периодъ}}); \quad \sqrt{20} = (5, \underbrace{2, 1, 1, 2, 10, \dots}_{\text{периодъ}}).$$

849. Вычисленіе логарифма. Пусть требуется вычислить $\text{Log } 2$ по основанію 10; другими словами, требуется рѣшить уравненіе $10^x = 2$. Сначала находимъ для x ближайшее цѣлое число. Такъ какъ $10^0 = 1$, а $10^1 = 10$, то x заключается между 0 и 1; слѣд., можно положить, что $x = \frac{1}{z}$; тогда

$10^{\frac{1}{z}} = 2$, или $10 = 2^z$. Не трудно видѣть, что z заключается между 3 и 4; слѣд., можно положить, $z = 3 + \frac{1}{z_1}$;

$$\text{тогда} \quad 10 = 2^{3 + \frac{1}{z_1}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{z_1}} = 8 \cdot 2^{\frac{1}{z_1}};$$

$$\text{откуда:} \quad 2^{\frac{1}{z_1}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

$$\text{слѣд.:} \quad 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{z_1}.$$

Испытаніемъ находимъ, что z_1 заключается между 3 и 4, потому можно положить: $z_1 = 3 + \frac{1}{z_2}$;

¹⁾ Можно было бы доказать, что непрерывная дробь, въ которую обращается квадратный корень изъ положительнаго цѣлаго числа, всегда периодична, при чемъ періодъ начинается со втораго частнаго и послѣднее частное въ періодѣ вдвое больше неперіодическаго частнаго.

тогда
$$2 = \binom{5}{4}^{3+\frac{1}{2}} = \binom{5}{4}^3 \cdot \binom{5}{4}^{\frac{1}{2}}$$

откуда:
$$\binom{5}{4}^{\frac{1}{2}} = 2 : \binom{5}{4}^3 = \frac{128}{125}; \text{ или } \left(\frac{128}{125}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Слова испытаниемъ находимъ, что z_2 заключается между 9 и 10. Этотъ приемъ можно продолжать далѣе. Довольствуясь приближенной величиной z_2 , можемъ положить $z_2=9$;

слѣд.,
$$z_1 = 3 + \frac{1}{9}, z = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9}} \text{ и } x = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9}}}.$$

Обративъ эту непрерывную дробь въ обыкновенную, получимъ: $x = \frac{28}{93} = 0,30107$. Этотъ результатъ вѣренъ до 4-го десятичнаго знака; болѣе точныя изысканія дадутъ: $x=0,3010300$.

350. Нахожденіе пары рѣшеній неопредѣленного уравненія. Непрерывныя дроби дають средство найти цѣлыя рѣшенія неопредѣленного уравненія $ax+by=c$. Покажемъ это на слѣдующихъ двухъ примѣрахъ.

Примѣръ 1. $43x+17y=8$.

Возьмемъ дробь $\frac{43}{17}$ и обратимъ ее въ непрерывную:

$$\frac{43}{17} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}.$$

Найдемъ теперь предъ послѣднюю подходящую дробь; это будетъ $\frac{10}{7}$.

Такъ какъ послѣдняя подходящая дробь есть точное значеніе непрерывной дроби, т.-е. $\frac{43}{17}$, а $\frac{20}{7}$ есть подходящая дробь нечетнаго порядка, то, на основаніи теоремъ §§ 342 (замѣчаніе) и 343, можемъ написать:

$$\frac{43}{17} - \frac{20}{7} = \frac{1}{13,7}; \text{ откуда: } 43,7 - 15,20 = 1.$$

Чтобы уподобить послѣднее тождество данному уравненію, умножимъ всѣ его члены на 8 и представимъ его такъ:

$$43,56 + 15(-160) = 8,$$

Сравнив теперь это тождество съ нашими уравненіемъ, находимъ, что въ послѣднемъ за x можно принять число 56, а за y число—160. Тогда всевозможныя рѣшенія выразятся формулами (§ 275):

$$x=56-15t, y=-160+43t.$$

Эти формулы можно упростить, замѣнивъ t на $t+3$ (что можно сдѣлать вслѣдствіе произвольности числа t):

$$x=56-15(t+3)=11-15t \quad y=-160+43(t+3)=-31+43t.$$

Примѣръ 2. $7x-19y=5$.

Обративъ дробь $\frac{7}{19}$ въ непрерывную, найдемъ:

$$\frac{7}{19}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

Предпоследняя подтолящая дробь будетъ $\frac{3}{8}$. Такъ какъ она четнаго порядка, то $\frac{7}{19}-\frac{3}{8}=\frac{-1}{19 \cdot 8}$, откуда:

$$7 \cdot 8 - 19 \cdot 3 = -1.$$

Умноживъ всѣ члены этого равенства на 5, получимъ:

$$7 \cdot 40 - 19 \cdot 15 = -5 \quad \text{или} \quad 7 \cdot (-40) - 19 \cdot (-15) = 5.$$

Сравнивая последнее тождество съ даннымъ уравненіемъ, находимъ что въ послѣднемъ за x можно принять число—40, а за y число—15.

Тогда $x=-40+19t, y=-15+7t$

Эти формулы можно упростить, замѣнивъ t на $t+2$:

$$x=-40+19(t+2)=-2+19t, y=-15+7(t+2)=-1+7t.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

(Въ развитие и дополненіе главы VI Отдѣла IV. „Понятіе о несоизмѣримомъ числѣ“).

Несоизмѣримыя числа.

1. Соизмѣримыя и несоизмѣримыя точки. Условимся называть любую точку числовой прямой (см. § 14) соизмѣримою или несоизмѣримою, смотря по тому, представляет ли она собою конецъ отрезка, соизмѣрнаго съ единицей длины и несоизмѣрнаго съ ней; при чемъ, конечно мы предполагаемъ, что за начало отрезковъ берется одна и та же условленная точка A (черт. 27) и



Черт. 27.

единицею длины служить одинъ и тотъ же опредѣленный отрезокъ прямой ab . Такъ какъ соизмѣримые и несоизмѣримые отрезки прямой могутъ быть и положительныя, и отрицательныя, то соизмѣримыя и несоизмѣримыя точки числовой прямой расположены и направо отъ пачальной точки A , и налѣво отъ нея. Самою точку A мы будемъ считать соизмѣримою такъ какъ, можно сказать, она есть конецъ соизмѣрнаго отрезка, равнаго 0. Замѣтимъ, что за положительное направленіе отрезковъ мы всегда будемъ брать направленіе слѣва направо (указанное на чертѣхъ стрѣлками).

2 Теорема. Между каждыми 2-мя точками числовой прямой (напр., между B и C , черт. 27) существуетъ на этой прямой соизмѣрима точка.

Док. Раздѣливъ единицу ab на такое большое число и равныхъ частей, чтобы каждая часть была меньше отрезка BC , станемъ откладывать одну такую часть на числовой прямой, начиная отъ точки A , по направленію къ точкѣ B . Очевидно, что, при достаточномъ числѣ отложеній, мы всегда перейдемъ за точку B , при чемъ по крайней мѣрѣ одна изъ точекъ

отложениа упадетъ между B и C , напр., въ точку D . Такъ какъ образовавшийся при этомъ отрезокъ AD будетъ соизмѣримъ съ единицею длины, то точка D и будетъ та соизмѣримая точка, которая расположена между B и C .

Слѣдствие. Между каждыи 2-мя точками числовой прямой существуетъ на этой прямой безчисленное множество соизмѣримыхъ точекъ

Дѣйствительно, по доказанному, между точками B и C существуетъ соизмѣримая точка D , но между B и D , а также между C и D тоже существуютъ соизмѣримыя точки; между этими точками опять-таки лежатъ соизмѣримыя точки, и т. д. безъ конца.

Замѣчаніе. Можно было бы доказать, что между каждыи 2-мя точками числовой прямой существуетъ несоизмѣримая точка, и какъ слѣдствие отсюда вывести, что между каждыи 2-мя точками числовой прямой существуетъ безчисленное множество несоизмѣримыхъ точекъ ¹⁾.

3. Каждая точка числовой прямой производитъ раздѣленіе всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ на 2 класса. Свойства этихъ классовъ. Такъ какъ каждый соизмѣримый съ единицею длины отрезокъ прямой можетъ быть точно выраженъ соизмѣримымъ числомъ (цѣлымъ или дробнымъ, положительнымъ или отрицательнымъ), то можно сказать, что каждой соизмѣримой точкѣ прямой соответствуетъ определенное соизмѣримое число, именно число, выражающее соизмѣримый отрезокъ, концемъ котораго эта точка служитъ; если, напр., отрезокъ AB (черт. 27) выражается числомъ $+2$, то точкѣ B соответствуетъ это число $+2$. Замѣтивъ это, мы можемъ сказать, что всякая точка числовой прямой, напр., точка D (черт. 27), производитъ раздѣленіе всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ на такіе 2 класса:

классъ всѣхъ тѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ, которыя соответствуютъ соизмѣримымъ точкамъ, лежащимъ на лѣво отъ взятой точки D (назовемъ этотъ классъ 1-мъ);

и классъ всѣхъ тѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ, которыя соответствуютъ соизмѣримымъ точкамъ, лежащимъ на право отъ D , и самой точкѣ D , если она принадлежитъ къ соизмѣримымъ точкамъ (назовемъ этотъ классъ 2-мъ).

Классы эти обладаютъ свойствомъ, что каждое число 1-го класса менѣе каждаго числа 2-го класса. Дѣйствительно, изъ двухъ чиселъ, соответствующихъ двумъ точкамъ числовой прямой, то считается меньшимъ, которое соответствуетъ лѣвой точкѣ; но каждая точка изъ тѣхъ, которымъ соответствуютъ числа 1-го класса,

¹⁾ Доказательство можно было бы обосновать на теоремѣ, что диагональ квадрата несоизмѣрима съ его стороною.

расположена лѣвѣ каждой точки изъ тѣхъ, которыми соответствуютъ числа 2-го класса; слѣд., каждое число 1-го класса менѣе каждого числа 2-го класса.

Если точка D , производящая указанное раздѣленіе, принадлежит сама къ несоизмѣримымъ точкамъ, то классы эти обладаютъ еще другимъ слѣдующимъ свойствомъ:

въ 1-мъ классѣ не существуетъ числа наибольшаго, во 2-мъ классѣ не существуетъ числа наименьшаго.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, допустимъ противное; напр., предположимъ, что во 2-мъ классѣ есть число наименьшее (положимъ, $+3$). Возьмемъ на числовой прямой соизмѣримую точку, соответствующую этому числу. Точка эта не можетъ быть точкой D , такъ какъ мы предположили точку D несоизмѣримой; значить, она должна быть расположена направо отъ D ; пусть это будетъ, напр., точка C (т.-е. $AC = +3$, черт. 27); тогда между D и C не будетъ существовать ни одной соизмѣримой точки. Но это противорѣчитъ теоремѣ предыдущаго параграфа; значить, нельзя допустить, чтобы во 2-мъ классѣ существовало наименьшее число. Такъ же можно доказать, что въ 1-мъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа.

Это свойство перестаетъ существовать, когда точка D , производящая раздѣленіе на классы, принадлежитъ сама къ соизмѣримымъ; тогда, отнеся соизмѣримое число, соответствующее этой точкѣ, къ 2-му классу какъ это мы дѣлали, мы получимъ въ этомъ классѣ наименьшее число, именно то, которое соответствуетъ точкѣ D (если бы мы это число причислили къ 1-му классу то въ этомъ классѣ было бы наибольшее число, именно, соответствующее точкѣ D).

Если вмѣсто точки D , о которой мы сейчасъ говорили, возьмемъ какую-нибудь другую точку, напр., точку C , то о ней, конечно, можно повторить все, сказанное о точкѣ D . Но классы чиселъ, производимые точкою C , будутъ не тѣ, которые производятся точкою D , а именно, тѣ числа, которыя соответствуютъ соизмѣримымъ точкамъ, лежащимъ между D и C , относятся къ 2-му классу въ раздѣленіи, производимомъ точкою D , тогда какъ въ раздѣленіи, производимомъ точкою C , они принадлежатъ 1-му классу. Значить каждой точкѣ прямой соответствуетъ свое опредѣленное раздѣленіе всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ на 2 класса.

4 Раздѣленіе соизмѣримыхъ чиселъ на 2 класса, производимое независимо отъ числовой прямой. Покажемъ на двухъ примѣрахъ, какъ иногда возможно, независимо отъ числовой прямой, распределить всѣ соизмѣримыя числа на 2 класса, обладающіе указанными свойствами.

Примѣръ 1-й. Замѣтивъ, что не существуетъ никакого соизмѣримаго числа, квадратъ котораго равнялся бы 2-мъ, мы можемъ разбить всѣ соизмѣримыя числа на слѣдующе два класса:

къ 1-му классу отнесемъ всё отрицательныя числа, число 0 и тѣ положительныя числа, квадраты которыхъ меньше 2-хъ;

къ 2-му классу отнесемъ всё тѣ положительныя числа, квадраты которыхъ больше 2-хъ.

Классы эти обладаютъ слѣдующими 2-мя свойствами:

1) каждое число 1-го класса меньше каждаго числа 2-го класса;

2) въ 1-мъ классѣ не существуетъ числа наибольшаго, во 2-мъ классѣ не существуетъ числа наименьшаго.

Первое свойство бесполезно доказывать по его очевидности. Для доказательства второго свойства, допустимъ, что a есть какое угодно положительное число 1-го класса. Тогда $a^2 < 2$ и слѣд., $2 - a^2 > 0$. Замѣтивъ это, возьмемъ положительное число n настолько большимъ, чтобы оно удовлетворяло неравенству:

$$\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2,$$

что, конечно, всегда возможно (мы можемъ, напр., выбрать n настолько большимъ, чтобы каждое изъ 2-хъ слагаемыхъ лѣвой части неравенства сдѣлалось меньше половины правой части). Тогда:

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < 2, \text{ т.-е. } \left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

Отсюда видно, что соизмѣримое числа $a + \frac{1}{n}$ принадлежать тоже 1-му классу, какъ и число a . Значитъ, какое бы число a въ 1-мъ классѣ мы ни взяли, всегда возможно въ этомъ же классѣ найти число $a + \frac{1}{n}$, большее a ; слѣд. наибольшаго числа въ 1-мъ классѣ не можетъ быть. Такъ же доказываеся, что во 2-мъ классѣ не можетъ быть числа наименьшаго¹⁾.

Примѣръ 2. Образуетъ 2 класса соизмѣримыхъ чиселъ слѣдующимъ образомъ: къ 1-му классу отнесемъ всё отрицательныя числа, число 0 и всё положительныя числа, меньшія $+2$; къ 2-му классу отнесемъ само число $+2$ и всё большія числа. Классы эти, вѣщая въ себя всё соизмѣримыя числа, обладаютъ, очевидно, свойствомъ, что каждое число 1-го класса меньше каждаго числа 2-го класса, но они не обладаютъ вторымъ изъ свойствъ, указанныхъ въ примѣрѣ 1-мъ, такъ какъ теперь во 2-мъ классѣ есть наименьшее число, именно $+2$.

¹⁾ Пусть A есть какое угодно число 2-го класса; тогда $A^2 > 2$ и, слѣд., $A^2 - 2 > 0$. Возьмемъ положительное число n настолько большимъ, чтобы $\frac{2A}{n} - \frac{1}{n^2} < A^2 - 2$; тогда: $2 < A^2 - \frac{2A}{n} + \frac{1}{n^2}$, т.-е. $2 < \left(A - \frac{1}{n}\right)^2$. Следовательно,

во 2-мъ классѣ есть число $A - \frac{1}{n}$, меньшее, чѣмъ A . Значитъ, въ этомъ классѣ наименьшаго числа не можетъ быть.

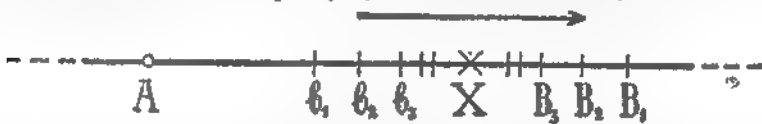
Б. Допущение. Примем без доказательства, какъ необходимое допущение, слѣдующее предположеніе:

если какииъ-нибудь способомъ намъ удалось установить раздѣленіе всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ на такіе 2 класса — 1-й и 2-й —, что каждое число 1-го класса меньше каждаго числа 2-го класса;

и если, выбравъ произвольную единицу длины, мы отнесемъ, при помощи этой единицы, всѣ соизмѣримыя числа къ соответствующимъ точкамъ числовой прямой,

то на этой прямой существуетъ точка и только одна, которая служитъ границей, отдѣляющею область точекъ, соответствующихъ числамъ 1-го класса, отъ области точекъ, соответствующихъ числамъ 2-го класса.

Предположеніе это можно наглядно пояснить совершенно такъ же, какъ это мы дѣлали въ текстѣ алгебры при установленіи несоизмѣримаго значенія



Черт. 28.

¹⁾ \sqrt{A} (§ 204). Пусть точки b_1, b_2, b_3, \dots (и вообще точка b , черт. 28) числовой прямой будутъ соответствовать числамъ 1-го класса, а точки B_1, B_2, B_3, \dots (и вообще точки B) будутъ соответствовать числамъ 2-го класса. Такъ какъ, по условію, каждое число 1-го класса меньше каждаго числа 2-го класса, то каждая изъ точекъ b должна лежать лѣвѣ каждой изъ точекъ B . Вообразимъ, что всѣ точки b , а также и промежутки между ними, окрашены въ какой-нибудь одинаковый цвѣтъ, напр., въ зеленый, и всѣ то ки B , а также и промежутки между ними, окрашены въ другой цвѣтъ, напр., въ красный. Такъ какъ точки b лежатъ лѣвѣ точекъ B , то зеленая часть прямой не можетъ захватить красную ея часть; слѣд., между этими частями должна быть какая-нибудь граница. Если допустить, что между зеленою и красною частями прямой лежитъ неокрашенный промежутокъ въ видѣ отрѣзка прямой, то мы должны тогда прийти къ заключенію, что на этомъ отрѣзкѣ нѣтъ ни одной соизмѣримой точки. Такъ какъ это невозможно, то такого допущенія слѣдуетъ избѣжать; остается допустить, что эти части раздѣлены отъ одной точкою ¹⁾, напр., точкою X (черт. 28).

¹⁾ Значитъ, допущеніе состоитъ въ признаніи, что тамъ, гдѣ кончается зеленая часть прямой и начинается красная, находится точка прямой, и, слѣд., въ этомъ мѣстѣ прямая не имѣетъ перерыва; другими словами, допущеніе состоитъ въ признаніи того свойства прямой, которое наз. непрерывностью.

О точке этой мы будем говорить, что она соответствует данному разложению соизмеримых чиселъ, или что она опредѣляется имъ.

Будетъ ли точка X соизмеримая, или несоизмеримая, это зависитъ отъ того, какой изъ слѣдующихъ возможныхъ случаевъ имѣетъ мѣсто:

1) Если въ 1-мъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа, но во 2-мъ классѣ есть наименьшее число (какъ это было въ примѣрѣ 2-мъ предыдущаго параграфа), то точка X будетъ соизмеримая, именно та, которая соответствуетъ наименьшему числу 2-го класса (числу $+2$ въ указанномъ примѣрѣ).

2) Если во 2-мъ классѣ нѣтъ наименьшаго числа, но въ 1-мъ классѣ есть наибольшее число, (какъ это было бы въ примѣрѣ 2-мъ предыдущаго параграфа, если бы число $+2$ мы причислили къ 1-му классу а не къ 2-му), то точка X окажется, какъ и въ первомъ случаѣ, соизмеримой; именно, это будетъ точка, соответствующая наибольшему числу въ 1-мъ классѣ.

Замѣтимъ, что этотъ случай можно всегда свести къ случаю 1-му, если мы условимся наибольшее число 1-го класса, если оно существуетъ, переноситъ во 2-й классъ; тогда въ 1-мъ классѣ не будетъ наибольшаго числа, а во 2-мъ классѣ окажется наименьшее число.

3) Если въ 1-мъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа и во 2-мъ классѣ нѣтъ наименьшаго, то точка X должна быть несоизмеримой. Дѣйствительно, если бы она была соизмеримая, то ей соответствовало бы некоторое соизмеримое число k . Такъ какъ всѣ соизмеримыя числа мы распредѣлили на 2 класса, то это число k принадлежало бы либо 1-му классу и тогда оно было бы въ немъ наибольшимъ, либо къ 2-му классу и тогда въ немъ было бы наименьшимъ ¹⁾.

6. Опредѣленіе несоизмеримаго числа. Условимся говорить, что въ области соизмеримыхъ чиселъ произведено сѣченіе (или разрѣзъ), если какимъ-нибудь путемъ намъ удалось распределить всѣ соизмеримыя числа на такіе 2 класса, 1-й и 2-й, что каждое число 1-го класса меньше каждаго числа 2-го класса.

Всякому сѣченію, какъ мы видѣли, соответствуетъ на числовой прямой опредѣленная точка, несоизмеримая, если въ 1-мъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа и во 2-мъ классѣ нѣтъ наименьшаго числа, и соизмеримая, если это условіе не выполнено.

Всякое сѣченіе (области соизмеримыхъ чиселъ) мы будемъ называть сѣченіемъ, при чемъ то сѣченіе, которому на числовой прямой соответствуетъ несоизмеримая точка, мы назовемъ несоизмеримымъ (или

¹⁾ Невозможно допустить, чтобы одновременно въ 1-мъ классѣ существовало наибольшее число a и во 2-мъ классѣ существовало наименьшее число A . Дѣйствительно, если бы это такъ было, то всѣ соизмеримыя числа заключающіяся между a и A (напр., среднее арифметическое этихъ чиселъ) не могли бы принадлежать ни 1-му, ни 2-му классу, что невозможно, такъ какъ классы наши, по условію, заключаютъ въ себѣ всѣ соизмеримыя числа.

иррациональнымъ) числомъ, а то сѣченіе, которому на этой прямой соответствуетъ соизмѣримая точка, мы будемъ отождествлять съ соизмѣримымъ числомъ, соответствующимъ этой точкѣ, т.-е. съ тѣмъ числомъ, которое является наименьшимъ во 2-мъ классѣ (или наибольшимъ въ 1-мъ). Такъ, то сѣченіе, которе было нами указано въ примѣрѣ 1-мъ § 4, представляетъ собою, согласно нашему опредѣленію, несоизмѣримое число, а сѣченіе, указанное тамъ же въ примѣрѣ 2-мъ, мы будемъ считать тождественнымъ числу $+2$.

Мы будемъ принимать, что несоизмѣримое число, представляющее собою нѣкоторое сѣченіе, измѣряетъ тотъ несоизмѣримый отрѣзокъ прямой, концомъ котораго служить точка, соответствующая этому сѣченію. Такъ какъ этотъ отрѣзокъ больше соизмѣримаго отрѣзка измѣряемаго любымъ числомъ 1-го класса, и меньше с измѣримаго отрѣзка, измѣряемаго любымъ числомъ 2-го класса, то мы примемъ, что несоизмѣримое число, представляющее собою нѣкоторое сѣченіе, больше каждаго соизмѣримаго числа, входящаго въ 1-й классъ этого сѣченія, и меньше каждаго соизмѣримаго числа, входящаго во 2-й его классъ.

Несоизмѣримое число обозначаютъ какии-нибудь знакомъ, напр., одною изъ буквъ греческаго алфавита: α , β , γ и т.д. Иногда его обозначаютъ какими-нибудь знаками латинскими: $a=A$, въ которыхъ a означаетъ область всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ, составляющихъ 1-й классъ, A означаетъ область всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ, составляющихъ 2-й классъ, и a —число, опредѣляемое сѣчениемъ (оно можетъ быть и соизмѣримое); вертикальная черта въ этомъ обозначеніи напоминаетъ, что вся область соизмѣримыхъ чиселъ разовѣчена на 2 класса a и A .

Несоизмѣримое число $\alpha = a/A$ считается известнымъ (или даннымъ), если вполнѣ известны его классы a и A , т.-е. если указанъ способъ, посредствомъ котораго о всякомъ соизмѣримомъ числѣ мы можемъ рѣшить, къ какому изъ классовъ a и A его надо отнести. Такъ, несоизмѣримое число, представляющее собою сѣченіе, указанное въ примѣрѣ 1-мъ § 4, можно считать известнымъ, потому что о всякомъ соизмѣримомъ числѣ мы можемъ рѣшить, къ какому изъ 2-хъ классовъ этого сѣченія его отнести; напр., число 1,4 надо отнести къ 1-му классу, потому что $1,4^2 = 1,96$, а $1,96 < 2$; число же 1,5 надо отнести ко 2-му классу, такъ какъ $1,5^2 = 2,25$, а $2, 5 > 2$.

7. Равенство и неравенство несоизмѣримыхъ чиселъ. Два несоизмѣримыя числа $\alpha = a/A$ и $\beta = b/B$ считаются равными, если они представляютъ собою тождественныя сѣченія, т.-е. если ихъ первые классы a и b , а также и вторые классы A и B , состоятъ соответственно изъ однихъ и тѣхъ же соизмѣримыхъ чиселъ.

Изъ двухъ неравныхъ несоизмѣримыхъ чиселъ то считается большимъ, у котораго 1-й классъ обширнѣе такъ, если классъ a содержитъ въ себѣ всѣ числа класса b и еще нѣкоторыя не входящія въ этотъ классъ (а входящія, слѣд., въ классъ B), то число $\alpha = a/A$ считается большимъ числа $\beta = b/B$.

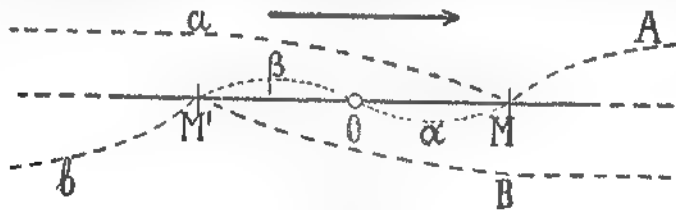
Если одно из сравниваемых чисел, напр., $\alpha = a/A$, несоизмеримое, а другое, напр., m , соизмеримое, то их относительная величина была уже определена нами ранее; именно: $\alpha > m$, если число m входит в 1-й класс (класс a) отсчета, и $\alpha < m$, если m входит во 2-й класс (класс A) отсчета $\alpha = a/A$.

Из этих определений следует, что если числа α и β отнесены к одной и той же числовой прямой, при одной и той же единице длины, то на ней равным числам соответствует одна и та же точка, неравным же числам соответствуют 2 различные точки, при чем большему числу соответствует правая точка, а меньшему—левая. Это можно выразить другими словами так: равные числа служат мерою равных (по величине и направлению) отрезков прямой, большему числу соответствует больший отрезок прямой.

Легко усмотреть, что свойства равенств и неравенств, верные для чисел соизмеримых, остаются также верными и для чисел несоизмеримых. Так, если $\alpha = \beta$, то и $\beta = \alpha$; если $\alpha = \beta$ и $\beta = \gamma$, то $\alpha = \gamma$, если $\alpha > \beta$, то $\beta < \alpha$; если $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, то $\alpha > \gamma$; и пр.

8. Положительные и отрицательные числа Число $\alpha = a/A$ называется положительным, если оно больше нуля, и отрицательным, если оно меньше нуля. Это значит, что в первом случае число 0 входит в класс a , а во втором случае оно входит в класс A . На числовой прямой положительным числам соответствуют точки, расположенные направо от начальной точки, а отрицательным числам—точки, лежащие налево от нея.

Два числа: $\alpha = a/A$ и $\beta = b/B$ называются противоположными, если на числовой прямой им соответствуют точки M и M' (черт. 29), расположенные по разные стороны от начальной точки O на разных от нея расстояниях; одно из этих чисел положительно, другое отрицательно ¹⁾.



Черт. 29.

¹⁾ На черт. 29-ю пунктирные линии, у которых поставлены буквы a , A , b и B , проведены с целью напомнить значение этих букв; так, буква a , означает совокупность всех соизмеримых чисел, которым соответствуют точки, лежащие налево от M ; буква A означает совокупность всех несоизмеримых чисел, которым соответствуют точки, лежащие направо от M , и т. п.

Изъ чертежа не трудно усмотрѣть, что если прямую повернуть (въ плоскости чертежа) на 180° вокругъ точки O , то точки M и M' поменяются мѣстами, а также поменяются мѣстами классы: b съ A и B съ a . Изъ этого слѣдуетъ, что если числа $\alpha = a/A$ и $\beta = b/B$ противоположны, то классы a и B состоятъ изъ чиселъ, противоположныхъ другъ другу, а также и классы A и b . Это можно выразить письменно такъ: если $\alpha = a/A$, то число, противоположное α , есть $-A/-a$. Число, противоположное α , выражаютъ также и такъ: $-\alpha$.

9. Приближенные значенія несоизмѣримаго числа. Приближеннымъ значеніемъ (или просто приближеніемъ) несоизмѣримаго числа $\alpha = a/A$, съ точностью до $\frac{1}{n}$ (n цѣлое положительное число), называется каждая изъ

двухъ дробей: $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$ (x цѣлое число), между которыми заключается число α ; меньшая изъ этихъ дробей наз. приближеніемъ съ недостаткомъ, а большая—съ избыткомъ. При $n=1$ эти приближенія точны до цѣлой единицы.

Такъ какъ приближеніе съ недостаткомъ есть соизмѣримое число, меньшее α , а приближеніе съ избыткомъ—соизмѣримое число, большее α , то первое есть одно изъ чиселъ класса a , а второе—одно изъ чиселъ класса A ; точнѣе сказать: первое есть наибольшее кратное доли $\frac{1}{n}$, заключающееся въ классѣ a , а второе—наименьшее кратное этой доли, содержащееся въ классѣ A .

10. Теорема. Для всякаго даннаго несоизмѣримаго числа можно найти его приближенія съ любой точностью

Док. Если число $\alpha = a/A$ дано, то это значитъ, что указавъ способъ, посредствомъ котораго о всякомъ соизмѣримомъ числѣ мы можемъ рѣшить, къ какому изъ двухъ классовъ: a или A оно принадлежитъ. Замѣтивъ это, положимъ что требуется найти приближенія этого даннаго числа съ точностью до $\frac{1}{n}$, гдѣ n есть какое угодно положительное цѣлое число. Для этого составимъ неограниченный въ обѣ стороны рядъ чиселъ:

$$\dots - \frac{3}{n}, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \dots$$

Очевидно, что числа этого ряда, при достаточномъ удаленіи направо, могутъ превзойти любое число, какъ бы оно велико ни было, а при достаточномъ удаленіи налево, они могутъ отдѣлаться меньше любого числа, какъ бы оно мало ни было. Поэтому, испытывая эти числа съ цѣлью опредѣлить, къ какому классу сѣченія a/A каждое изъ нихъ относится, мы

непрерывно дойдем до двух рядом стоящих чисел $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$ таких, что меньшее из них окажется принадлежащим классу a (и слѣд. будетъ меньше a), а большее — классу A (и, слѣд., будетъ больше a). Это и будутъ искомыя приближенныя значенія съ точностью до $\frac{1}{n}$.

11. Слѣдствіе. Если дано сѣченіе a/A , то всегда возможно найти два такіа числа, одно изъ класса A , другое изъ класса a , что разность между ними будетъ меньше любого данного положительнаго числа (какъ бы мало оно ни было).

Положимъ, напр., мы желаемъ, чтобы эта разность была меньше 0,01. Для этого найдемъ приближенныя значенія числа $a=A/A$ съ точностью до такой дроби $\frac{1}{n}$, которая была бы меньше 0,01 (напр., до 0,001). Тогда мы будемъ имѣть 2 числа: одно $\frac{x+1}{n}$, принадлежащее классу A , другое $\frac{x}{n}$, принадлежащее классу a , и такіл, что разность между ними менѣе 0,01.

Замѣчаніе. Приближенныя значенія двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ могутъ служить средствомъ для установленія равенства а ихъ, какъ это было объяснено въ текстѣ алгебры (§ 200).

12. Десятичныя приближенія. Чаще всего приходится находить приближенія даннаго числа съ точностью до какой-нибудь десятичной доли единицы. Для примѣра найдемъ съ точностью до 0,001 приближенія того несоизмѣримаго числа, о которомъ мы уже неоднократно говорили, именно числа $a=A/A$, у котораго 1-й классъ a состоитъ изъ всѣхъ отрицательныхъ соизмѣримыхъ чиселъ, числа 0 и тѣхъ положительныхъ соизмѣримыхъ чиселъ, которыхъ квадраты меньше 2-хъ, а 2-й классъ A включаетъ въ себѣ всѣ положительныя соизмѣримаа числа, квадраты которыхъ больше 2-хъ. Для уменьшенія числа испытаній будемъ вести нахождение приближеній въ такой последовательности: сначала найдемъ приближенія съ точностью до 1, потомъ съ точностью до 0,1, затѣмъ до 0,01 и, наконецъ, до 0,001.

Такъ какъ $1^2 < 2 < 2^2$, то число 1 принадлежитъ первому классу, а число 2—второму классу; поэтому $1 < a < 2$. Значитъ, числа 1 и 2 суть приближенія a съ точностью до 1.

Чтобы найти теперь приближенія a съ точностью до 0,1 достаточно испытать только рядъ чиселъ:

$$1,1; 1,2; 1,3... 1,9,$$

такъ какъ 1 и всѣ числа, меньшіа 1, принадлежатъ 1-му классу, а 2 и всѣ числа, большія 2-хъ, относятся ко 2-му классу. Возьмемъ изъ указаннаго ряда чиселъ какое-нибудь одно, напр. среднее 1,5, и испытаемъ его. Такъ

какъ $1,5^2=2,25$, что больше 2-хъ, то число 1,5 (и всѣ большія) относятся къ 2-му классу. Следовательно, теперь надо испытать только числа: 1,1; 1,2; 1,3; 1,4. Находя квадраты этихъ чиселъ, видимъ, что всѣ они меньше 2-хъ; значить: $1,4 < \alpha < 1,5$. Поэтому каждое изъ чиселъ 1,4 и 1,5 есть приближеніе α съ точностью до 0,1.

Чтобы найти теперь приближенія съ точностью до 0,01, достаточно испытать рядъ чиселъ:

$$1,41; 1,42; 1,43; \dots 1,49.$$

Такъ какъ $1,41^2=1,9881 < 2$, а $1,42^2=2,0164 > 2$, то $1,41 < \alpha < 1,42$. Наполець, чтобы найти приближенія до 0,001, достаточно испытать числа:

$$1,411; 1,412; 1,413; \dots 1,419.$$

Возвысивъ въ квадратъ среднее число 1,415, получаемъ больше 2-хъ. Значить, остается подвергнуть испытанію первая 4 числа. Оказывается, что $1,414^2 < 2$. Значить: $1,414 < \alpha < 1,415$, и поэтому каждое изъ чиселъ: 1,414 и 1,415 есть искомое приближенное значеніе числа α съ точностью до 0,001¹.

Теперь можно было бы находить приближенія числа α съ точностью до 0,0001, затѣмъ съ точностью до 0,00001 и т. д. При этомъ, какъ видно изъ самаго способа нахождения, всѣ десятичные знаки приближенія съ недостаткомъ съ точностью до $\frac{1}{10^n}$ переходятъ безъ измѣненія

и въ приближеніе съ недостаткомъ съ точностью до $\frac{1}{10^{n+1}}$, при чемъ къ знакамъ этихъ добавляется еще одинъ новый знакъ (который иногда можетъ оказаться и нулемъ). Приближенія съ избыткомъ получаются изъ соответствующихъ приближеній съ недостаткомъ посредствомъ усиленія послѣдняго десятичнаго знака на 1.

Взявъ изъ двухъ найденныхъ приближеній только одно съ недостаткомъ, мы можемъ написать: $\alpha = 1,414\dots$. Точки, поставленныя послѣ найденныхъ цифръ, означаютъ, что къ этимъ цифрамъ можно было бы находить и слѣдующія.

¹⁾ Замѣтимъ, что приближенія взятаго нами числа α мы могли бы найти тѣмъ способомъ, который указывается въ алгебрѣ для нахождения приближенныхъ квадратныхъ корней изъ 2-хъ (§ 179). Въ самомъ дѣлѣ, согласно опредѣленію, приближенные квадратные корни изъ 2-хъ, съ точностью до $\frac{1}{n}$, суть такіа числа $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, которыя удовлетворяютъ неравенству $\left(\frac{x}{n}\right)^2 < 2 < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$; слѣд., $\frac{x}{n} < \alpha < \frac{x+1}{n}$. Мы однако нарочно примѣнили въ текстѣ другой общій приемъ съ цѣлью на примѣрѣ показать, какъ имъ слѣдуетъ пользоваться.

Подобнымъ же образомъ можно обратитьъ въ десятичную дробь и всякое соизмѣримое число, но тогда, какъ извѣстно изъ арифметики, получается или конечная десятичная дробь, или безконечная періодическая. Если же мы обращаемъ въ десятичную дробь несоизмѣримое число, то въ результатѣ получается безконечная десятичная дробь, но не періодическая.

Дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами.

(При строгомъ изложеніи теоріи несоизмѣримыхъ чиселъ мы должны къ тому, что было нами сказано о дѣйствіяхъ надъ этими числами въ текстѣ алгебры (см § 201), сдѣлать нѣкоторые разъясненія и добавленія) Изложимъ ихъ въ порядкѣ дѣйствій).

13. Сложеніе и умноженіе. Данныя нами въ алгебрѣ опредѣленія этихъ дѣйствій полезно теперь выразить нѣсколько иначе, а именно такъ:

1) Сложить несоизмѣримыя числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, значитъ найти число, которое больше суммы любыхъ соизмѣримыхъ чиселъ, соответственно меньшихъ чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, и меньше суммы любыхъ соизмѣримыхъ чиселъ, соответственно большихъ чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

2) Перемножить положительные несоизмѣримыя числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ значитъ найти число, которое больше произведенія любыхъ положительныхъ соизмѣримыхъ чиселъ, соответственно меньшихъ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, и меньше произведенія любыхъ соизмѣримыхъ чиселъ, соответственно большихъ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Докажемъ, что искомое число, о которомъ говорится въ каждомъ изъ этихъ 2-хъ опредѣленій, существуетъ и притомъ только одно при всякихъ данныхъ числахъ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Для простоты мы ограничимся рассмотримъ случай, когда данныхъ чиселъ только два.

Преварительно замѣтимъ, что любое соизмѣримое число, меньшее даннаго несоизмѣримаго, есть число, взятое изъ 1-го класса, а любое соизмѣримое число, большее даннаго несоизмѣримаго, есть число, взятое изъ 2-го класса сѣченія, опредѣляющаго это несоизмѣримое число.

Пусть намъ даны два несоизмѣримыя числа: $\alpha = a/A$ и $\beta = b/B$. Условимся—всякое число, которое можетъ быть получено сложениемъ любого числа изъ класса a съ любымъ числомъ изъ класса b , называть числомъ „вида $a+b$ “; подобно этому, всякое число, которое можетъ быть получено сложениемъ любого числа изъ класса A съ любымъ числомъ изъ класса B , мы будемъ называть числомъ „вида $A+B$ “. Замѣтивъ это, составимъ слѣдующіе 2 класса соизмѣримыхъ чиселъ къ 1-му классу (назовемъ его a) отнесемъ всѣ числа вида $a+b$ и всѣ меньшія какого-либо изъ этихъ чиселъ; ко второму классу (обозначимъ его C) отнесемъ всѣ числа вида $A+B$ и

всѣ большія какого-либо изъ этихъ чиселъ¹⁾. Легко убѣдиться, что классы эти обладаютъ слѣдующими 3-мя свойствами:

1°, каждое число класса c меньше каждаго числа класса C (потому что каждое a меньше каждаго A и каждое b меньше каждаго B);

2°, въ классѣ c нѣтъ наибольшаго числа, въ классѣ C нѣтъ наименьшаго числа (такъ какъ, если a и β числа несоизмѣримыя, то нѣтъ наибольшихъ a и b и нѣтъ наименьшихъ A и B);

3°, всегда возможно найти такое число C_1 изъ класса C и такое число c_1 изъ класса c , что разность $C_1 - c_1$ будетъ какъ угодно мала.

Дѣйствительно, если допустимъ, что $C_1 = A_1 + B_1$ и $c_1 = a_1 + b_1$, гдѣ A_1, B_1, a_1 и b_1 суть какия-либо числа соответственно изъ классовъ A, B, a и b , то

$$C_1 - c_1 = (A_1 + B_1) - (a_1 + b_1) = (A_1 - a_1) + (B_1 - b_1).$$

По свойству стѣ. ній a/A и b/B каждая изъ разностей: $A_1 - a_1$ и $B_1 - b_1$ можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой (§ 11 этого приложенія); слѣд., и сумма этихъ разностей (а потому и число $C_1 - c_1$) можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой.

Разсмотримъ теперь такіе 2 возможные случая:

1) Пусть классы c и C_1 включаютъ въ себѣ всѣ соизмѣримыя числа. Тогда, вслѣдствіе свойства 1°, они образуютъ стѣнненіе c/C_1 , представляющее собою нѣкоторое единственное число γ , которое, вслѣдствіе свойства 2°, должно быть несоизмѣримымъ. Но несоизмѣримое число $\gamma = c/C_1$ больше каждаго числа изъ класса c и меньше каждаго числа изъ класса C_1 , т. е. оно больше каждаго числа вида $a + b$ и меньше каждаго числа вида $A + B$, слѣд., оно и есть то число, которое мы опредѣлили, какъ сумму $\alpha + \beta$.

2) Пусть классы c и C включаютъ въ себѣ не всѣ соизмѣримыя числа. Изъ способа образованія этихъ классовъ слѣдуетъ, что тѣ соизмѣримыя числа, которыя не входятъ ни въ классъ c , ни въ классъ C , должны быть больше всякаго числа изъ класса c и меньше всякаго числа изъ класса C . Докажемъ, что такихъ чиселъ не можетъ быть больше одного. Допустимъ, что существуютъ 2 соизмѣримыхъ числа N и $N_1 > N$, которыя превосходятъ всѣ числа класса c и меньше всѣхъ чиселъ класса C . Тогда, очевидно, разность между любымъ числомъ изъ класса C и любымъ числомъ изъ класса c должна быть больше разности $N_1 - N$. Такъ какъ это противорѣчитъ свойству 3° классовъ c и C , то, значить, такого допущенія сдѣлать нельзя. Итакъ, если случится, что

¹⁾ Дополненія: „всѣ меньшія какого-либо изъ этихъ чиселъ“ и „всѣ большія какого-либо изъ этихъ чиселъ“, строго говоря, излишни, такъ какъ можно доказать, что всякое соизмѣримое число, меньшее какого-либо числа вида $a + b$, есть само число вида $a + b$, и всякое соизмѣримое число, большее какого-либо числа вида $A + B$, есть число вида $A + B$. Дополненія эти мы и сдѣлали только для того, чтобы не тратить ни времени, ни мѣста на это доказательство.

наши классы выщяаютъ въ себѣ не всѣ соизмѣримыя числа, то тогда всѣ классы состоятъ только одно соизмѣримое число, которое больше всякаго числа вида $a+\beta$ и меньше всякаго числа вида $A+B$, это соизмѣримое число и есть сумма $\alpha+\beta$.

Докажемъ теперь существованіе числа, которое мы опредѣлили, какъ произведеніе положительныхъ несоизмѣримыхъ чиселъ $\alpha=a/A$ и $\beta=b/B$. Обозначивъ буквами a' и b' какии угодно положительныя числа, взятая соответственно изъ классовъ a и b (т. е. слѣд. соответственно меньшія чиселъ a и β), составимъ c классъ соизмѣримыхъ чиселъ слѣдующимъ образомъ: къ одному классу (обозначимъ его c) отнесемъ всѣ числа вида $a'b'$, и всѣ меньшія любого изъ такихъ чиселъ (слѣд., между прочимъ всѣ отрицательныя соизмѣримыя числа и число 0; къ другому классу C отнесемъ всѣ числа вида AB и большія какого-либо изъ этихъ чиселъ ¹⁾). Классы эти обладаютъ тѣми же 3-мя свойствами, какия мы указали выше для классовъ, образованныхъ для доказательства существованія суммы $\alpha+\beta$. Первые два свойства почти очевидны; третье можно доказать такъ. Пусть $C_1=A_1B_1$ есть какое-нибудь число изъ класса C и $c_1=a_1b_1$ какое-нибудь число изъ класса c , положимъ еще, что $A_1-a_1=p$ и $B_1-b_1=q$. Тогда:

$$C_1 - c_1 = A_1B_1 - a_1b_1 = (a_1+p)(b_1+q) - a_1b_1 = b_1p + a_1q + pq.$$

Возьмемъ какое-нибудь соизмѣримое число M , которое было бы больше каждаго изъ чиселъ c и β ; оно будетъ, и издавна, больше каждаго изъ чиселъ a_1 и b_1 . Поэтому

$$C_1 - c_1 < Mp + Mq + pq \text{ т. е. } C_1 - c_1 < M(p+q) + pq.$$

Такъ какъ по своему значенію (§ 11) числа $p=A_1-a_1$ и $q=B_1-b_1$ могутъ сдѣлаться какъ угодно малыя, то правая часть послѣдняго неравенства и слѣд., и его лѣвая часть, можетъ быть также сдѣлана какъ угодно малою.

Во всемъ дальнѣйшемъ доказательство для произведенія $\alpha\beta$ совершенно одинаково съ изложеннымъ выше доказательствомъ для суммы $\alpha+\beta$.

Замѣчанія. 1°. Опредѣленія сложенія и умноженія несоизмѣримыхъ чиселъ не находятся въ противорѣчій съ опредѣленіями этихъ дѣйствій для чиселъ соизмѣримыхъ; напр., сумма $m+n$ соизмѣримыхъ чиселъ, конечно, болѣе суммы любыхъ соизмѣримыхъ чиселъ, соответственно меньшихъ m и n , и меньше суммы любыхъ соизмѣримыхъ чиселъ, соответственно большихъ m и n . По само собою разумѣется, что если соизмѣримыя числа m и n даны, не какъ сѣченія, то дѣйствія надъ ними производятся независимо отъ указанныхъ опредѣленій.

2°. Если нѣкоторыя изъ данныхъ чиселъ соизмѣримыя, а другія несоизмѣримыя, то хотя указанная выше опредѣленія сложенія и умноженія применимы и въ вѣдомъ случаѣ, однако ихъ полезно тогда нѣсколько

¹⁾ Здѣсь можно сдѣлать то же замѣчаніе, какое мы сдѣлали въ выноскѣ на предыдущей страницѣ.

упростать (какъ это было нами указано въ алгебрѣ, § 201; напр., если $a = a/A$ есть число несоизмѣримое, а m числo соизмѣримое, то сумма $a + m$ есть число, большее каждой суммы вида $a + m$ и меньшее каждой суммы вида $A + m$. Въ частности, напр., $a + 0 = a$, $a + 1 = a$.

3. Произведеііе, въ которомъ какой-нибудь сомножитель есть нуль, принимается, по опредѣленію, равнымъ 0.

14. Основные свойства сложенія и умноженія. Эти свойства для несоизмѣримыхъ чиселъ остаются тѣ же самыя, какія были указаны для чиселъ соизмѣримыхъ, что можно для каждаго случая доказать такъ, какъ мы это сейчасъ сдѣлаемъ для распределительнаго свойства умноженія. Пусть α, β, γ будутъ положительныя несоизмѣримыя числа; требуется доказать, что

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Обозначимъ буквами a, b е любые соизмѣримыя положительныя числа, соответственно меньшія числа α, β, γ , и буквами A, B, C любыя соизмѣримыя числа, соответственно большія числа α, β, γ . Тогда, согласно опредѣленіямъ сложенія и умноженія, лѣвая часть доказываемаго равенства представляетъ собою число, большее каждаго числа вида $(a + b)c$ и меньшее каждаго числа вида $(A + B)C$, правая же часть того же равенства есть число, большее каждаго числа вида $ac + bc$ и меньшее каждаго числа вида $AC + BC$. Но любое число вида $a + b$ с, согласно распределительному свойству умноженія въ примененіи къ соизмѣримымъ числамъ, есть также и число вида $ac + bc$, и любое число вида $(A + B)C$ есть также и число вида $AC + BC$ слѣд., обѣ части доказываемаго равенства представляютъ собою одно и то же число и потому равенство это вѣрно.

15. Возвышеніе въ степень. Пусть a есть какое-нибудь положительное несоизмѣримое число и $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ какія угодно положительныя соизмѣримыя числа, меньшія a , а $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ какія угодно соизмѣримыя числа, большія a . Тогда выраженіе a^n , представляющее собою, по опредѣленію, произведеніе n одинаковыхъ сомножителей: $aaa \dots a$, есть нѣкоторое число γ , которое, согласно опредѣленію умноженія, больше каждаго изъ изведенія $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ и меньше каждаго произведенія $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$. Докажемъ теперь предположеніе, принятое нами въ курсѣ алгебры безъ доказательства (§ 201, ν^o), а именно, что это число γ есть въ то же время такое число γ' , которое больше n -ой степени любого положительнаго соизмѣримаго числа a , меньшаго a , и меньше n -ой степени любого соизмѣримаго числа A , большаго a . Дѣйствительно:

число γ должно быть больше каждой степени a^n , потому что степень эта представляетъ собою частный случай произведенія $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ (тотъ случай, когда всѣ эти сомножители равны), а число γ , по опредѣленію, больше всякаго такого произведенія;

обратно, число γ' должно быть больше каждаго произведенія $a_1 a_2 \dots a_n$,

потому что это произведение не больше n -й степени наибольшего из чисел a_1, a_2, \dots, a_n , а число γ' , по определению, больше n -й степени любого из этих чисел.

Так же убеждаемся, что число γ должно быть меньше каждой степени A^n , и, обратно, число γ' должно быть меньше каждого произведения $A_1 A_2 \dots A_n$.

Отсюда следует, что $\gamma = \gamma'$, и так как, по свойству умножения, число γ существует только одно, то и число γ' также должно быть единственным.

16. Вычитание. Данныи нами в курсѣ алгебры (§ 201, 4^о) опредѣленія обратныхъ дѣйствій: вычитанія, дѣленія и извлеченія корня (одинаковыя для чиселъ соизмѣримыхъ и несоизмѣримыхъ) не требуютъ какихъ-либо измѣненій или дополненій. Намъ нужно только доказать, что тѣ правила вычитанія (§ 23) и дѣленія (§ 41), которыя были указаны раньше для чиселъ соизмѣримыхъ, применимы вполнѣ и къ числамъ несоизмѣримымъ.

Общее правило вычитанія. Чтобы вычесть какое нибудь число, достаточно къ уменьшаемому приложить число, противоположное вычитаемому.

Требуется доказать, что $a - \beta = \alpha + \beta'$, если β' есть число, противоположное β . Для доказательства найдемъ сумму: $(\alpha + \beta') + \beta$, которую, согласно сочетательному свойству сложения, можно написать такъ: $\alpha + (\beta' + \beta)$. Докажемъ, что $\beta + \beta' = 0$. Если $\beta = b/V$, то, какъ мы видѣли (§ 8 этого прил.), $\beta' = -b/V$. Тогда, по опредѣленію сложения, сумма $\beta + \beta'$ есть число, большее каждаго числа вида $b + (-b) = b - b$, и меньшее каждаго числа вида $V + (-b) = V - b$. Такъ какъ всякое b меньше всякаго V , и, кромѣ того, разность $V - b$ можетъ быть какъ угодно мала и какъ угодно велика, то числа вида $b - b$ суть всѣ отрицательныя соизмѣримыя числа, а числа вида $V - b$ суть всѣ положительныя соизмѣримыя числа: число же, большее первыхъ и меньшее вторыхъ, есть только 0; значитъ, $\beta + \beta' = 0$. Тогда будемъ имѣть:

$$(\alpha + \beta') + \beta = \alpha + (\beta' + \beta) = \alpha + 0 = \alpha.$$

Слѣдовательно, согласно опредѣленію вычитанія, разность $\alpha - \beta$ дѣйствительно равна суммѣ $\alpha + \beta'$.

Другое опредѣленіе вычитанія. Пусть $\alpha = a/A$ и $\beta = b/B$; тогда $\alpha' = -b/V$, и потому сумма $\alpha + \beta'$ есть число, большее каждаго числа вида $a + (-b) = a - b$ и меньшее каждаго числа вида $A + (-b) = A - b$. Слѣдовательно, мы можемъ вычитаніе опредѣлить и такъ:

вычесть изъ числа $\alpha = a/A$ число $\beta = b/B$ значитъ найти число, большее любого числа вида $a - b$ и меньшее любого числа вида $A - b$.]

Слѣдствіе. Допустимъ, что $\alpha > \beta$. Это значитъ, что классъ a обширнѣе класса b , т. е. что въ классѣ a встрѣчаются и такія числа, которыя не

входятъ въ классъ b , а входятъ, слѣд., въ классъ B . Тогда, очевидно, среди чиселъ вида $a - B$ находится также и число 0; вслѣдствіе этого разность $\alpha - \beta$, которая больше всякаго числа вида $a - B$, должна быть больше нуля, т.-е. эта разность есть число положительное.

Допустимъ, что $\alpha < \beta$. Это значить, что классъ b обширнѣе класса a , т.-е. что въ классѣ b встрѣчаются и такія числа, которыя не входятъ въ классъ a , а входятъ, слѣд., въ классъ A . Въ такомъ случаѣ, очевидно среди чиселъ вида $b - A$ находится также и число 0. Поэтому разность $\alpha - \beta$, которая меньше всякаго числа вида $b - A$, должна быть также меньше нуля, т.-е. эта разность есть число отрицательное.

Отсюда слѣдуетъ обратное заключеніе: если $\alpha - \beta > 0$, то $\alpha > \beta$ и если $\alpha - \beta < 0$, то $\alpha < \beta$.

Такимъ образомъ, это соотношеніе между разностью двухъ чиселъ и ихъ относительной величиной, которое въ области соизмѣримыхъ чиселъ служить опредѣленіемъ понатій „больше“ и „меньше“, остается примѣнимымъ и къ несоизмѣримымъ числамъ. Вслѣдствіе этого всѣ тѣ свойства неравенствъ, которыя основаны на этомъ соотношеніи (§ 259), примѣнимы и къ числамъ несоизмѣримымъ. Такъ:

- 1) если $\alpha > \beta$ и $\gamma \geq \delta$, то $\alpha + \gamma > \beta + \delta$;
- 2) если $\alpha > \beta$ и m положительное число, то $\alpha m > \beta m$;
- 3) если $\alpha > \beta$ и m отрицательное число, то $\alpha m < \beta m$, и пр.

17. Дѣленіе. Чтобы показать примѣнимость къ несоизмѣримымъ числамъ правила дѣленія, указаннаго прежде для чиселъ соизмѣримыхъ (§ 41), мы должны предварительно установить, что называется числомъ, обратнымъ несоизмѣрному числу α , и указать нѣкоторыя свойства его.

Обратное число. Предположимъ сначала, что несоизмѣримое число $\alpha = a/A$ положительно. Обозначимъ буквою α' любое положительное число изъ класса a . Тогда обратнымъ по отношенію къ α называемъ число, большее любого числа вида $\frac{1}{A}$, и меньшее любого числа вида $\frac{1}{\alpha'}$. Для доказательства существованія такого числа (и притомъ единственнаго) составимъ 2 класса соизмѣримыхъ чиселъ слѣдующимъ образомъ: къ 1-му классу (обозначимъ его a) отнесемъ всѣ отрицательныя числа, число 0 и всѣ положительныя числа вида $\frac{1}{A}$, ко 2-му классу (обозначимъ его b) отнесемъ всѣ числа вида $\frac{1}{\alpha'}$. Классы эти, включая въ себя всѣ отрицательныя соизмѣримыя числа и число 0, содержатъ также и всѣ положительныя соизмѣримыя числа. Дѣйствительно, какое бы положительное соизмѣримое число k мы ни взяли, его всегда можно представить подъ видомъ $k = \frac{1}{z}$, гдѣ z есть нѣкоторое со-

наименьшее положительное число. Это число α , конечно, должно быть либо меньше a , либо больше a . В первом случае число k должно быть одним из чисел вида $\frac{1}{a'}$ и, следовательно, должно относиться ко 2-му классу; во втором случае число k будет одним из чисел вида $\frac{1}{A}$ и потому должно относиться к 1-му классу. Итак, классы ϵ и ζ вмещают в себя все соизмеримые числа. Кроме того, они обладают следующими 2 свойствами: 1) каждое число 1-го класса меньше каждого числа 2-го класса (так как каждое A больше каждого a'); 2) из чисел 1-го класса нет наибольшего (так как из чисел A нет наименьшего), из чисел 2-го класса нет наименьшего (так как из чисел a' нет наибольшего). Вследствие этого классы ϵ и ζ образуют вместе ϵ/ζ , представляющее собою некоторое несоизмеримое число α' , большее каждого числа из класса ϵ и меньшее каждого числа из класса ζ и, следовательно, большее каждого числа вида $\frac{1}{A}$ и меньшее каждого числа вида $\frac{1}{a'}$. Это и есть то число, которое мы назвали обратным числом α .

Если $\alpha < 0$, то обратное число получится если возьмем число, обратное абсолютной величине α , и поставим перед ним знак $-$.

Число 0 не имеет себе обратного числа.

Свойства обратного числа. 1° Если α' есть число, обратное α , то и α есть число, обратное α' .

Действительно, если $\alpha > 0$, то α' есть число, большее каждого числа вида $\frac{1}{A}$ и меньшее каждого числа вида $\frac{1}{a'}$; тогда число α'' , обратное α' , должно быть числом, большим каждого числа вида $1: \frac{1}{a'} = a'$ и меньшим

каждого числа вида $1: \frac{1}{A} = A$; значит, $\alpha'' = \alpha$. Это равенство не нарушится и тогда, когда $\alpha < 0$, потому что тогда и $\alpha'' < 0$, а абсолютные величины этих чисел одинаковы.

2°. Произведение двух чисел, обратных друг другу, равно 1.

Действительно, если $\alpha > 0$, то и $\alpha' > 0$, и тогда произведение $\alpha\alpha'$ есть число, большее всякого числа вида a' . $\frac{1}{A} = \frac{a'}{A}$ и меньшее всякого числа

вида $A \cdot \frac{1}{a'} = \frac{A}{a'}$. Числа первого вида — это все положительные соизмеримые числа, меньшие 1, а числа второго вида — это все положительные соизмеримые числа, большие 1; значит, $\alpha\alpha' = 1$. Это равенство не нарушится и тогда, когда $\alpha < 0$, потому что тогда и $\alpha' < 0$, а произведение абсолютных величин этих чисел равно 1.

Изъ равенства: $\alpha\alpha' = 1$, по опредѣленію дѣленія, слѣдуетъ: $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$; такимъ образомъ, и для несоизмѣримыхъ чиселъ остается вѣрнымъ, что число, обратное α , равно частному отъ дѣленія 1 на α .

Правило дѣленія. Чтобы раздѣлить α на β , достаточно α умножить на число β' , обратное дѣлителю.

Въ самомъ дѣлѣ: $\alpha : \beta = \alpha\beta'$, потому что $(\alpha\beta')$. $\beta = \alpha\beta\beta'$, что, согласно сочетательному св-ству умноженія, равно $\alpha(\beta\beta')$. По $\beta\beta' = 1$ и $\alpha \cdot 1 = \alpha$; значить, частное $\alpha : \beta$ дѣйствительно равно $\alpha\beta'$.

Другое опредѣленіе дѣленія. Пусть $\alpha = a/A$ и $\beta = b/B$ будутъ два положительныхъ несоизмѣримыхъ числа. Обозначимъ буквами a' и b' любыя положительныя числа соответственно изъ классовъ a и b . Такъ какъ число β' , обратное β , больше каждаго числа вида $\frac{1}{B}$ и меньше каждаго числа вида $\frac{1}{b'}$, то частное $\alpha : \beta$, равно, какъ мы видѣли, произведенію $\alpha\beta'$, должно быть, согласно опредѣленію умноженія, больше любого числа вида $a' \cdot \frac{1}{B} = \frac{a'}{B}$ и меньше любого числа вида $A \cdot \frac{1}{b'} = \frac{A}{b'}$. Поэтому мы можемъ опредѣлить дѣленіе и такъ:

раздѣлить положительныя числа $\alpha = a/A$ на $\beta = b/B$ значить найти число, которое больше всякаго числа вида $a' : B$ и меньше всякаго числа вида $A : b'$.

18. Извлеченіе корня. Для доказательства существованія $\sqrt[m]{A}$ при всякомъ положительномъ числѣ A (несоизмѣримомъ или соизмѣримомъ) не представляющемъ собою точной m -ой степени никакого соизмѣримаго числа, мы можемъ, съ точки зрѣнія теоріи сѣченій, рассуждать такъ. Разобьемъ область соизмѣримыхъ чиселъ на такіе 2 класса: въ 1-му классу (обозначимъ его e) отнесемъ все отрицательныя числа, число 0 и тѣ положительныя, m -ая степень которыхъ меньше A , ко 2-му классу (обозначимъ его C) отнесемъ все положительныя числа, m -ая степень которыхъ больше A . Классы эти, выѣмая въ себѣ все соизмѣримыя числа, обладаютъ, очевидно, свойствомъ, что каждое число 1-го класса меньше каждаго числа 2-го класса. Поэтому они образуютъ сѣченіе e, C , представляющее собою нѣкоторое положительное число $\gamma = e/C^m$. Докажемъ, что m -ая степень этого числа равна A .

¹⁾ Можно теперь же доказать, что число это несоизмѣримое. Для этого достаточно обнаружить, что въ 1-мъ классѣ не существуетъ наибольшаго числа и во 2-мъ классѣ не существуетъ наименьшаго числа. Пусть a есть какое-нибудь положительное число, принадлежащее 1-му классу

Согласно свойству возвышенія въ степень (§ 15 этого приложения), выраженіе γ^m есть то единственное число, которое больше m -ой степени любого соизмѣрнаго положительнаго числа, меньшаго γ , и меньше m -ой степени любого соизмѣрнаго числа, большаго γ . Но всякое соизмѣримое число, меньшее γ , входитъ въ классъ ϵ , и всякое соизмѣримое число, большее γ , входитъ въ классъ ζ ; классы же эти такъ нами составлены, что m -ая степень любого положительнаго числа, входящаго въ классъ ϵ , меньше A , а m -ая степень любого числа, входящаго въ классъ ζ , больше A . Значитъ, то единственное число, которое представляетъ собою выраженіе γ^m , и есть число A . Такимъ образомъ: $\gamma^m = A$ и потому $\gamma = \sqrt[m]{A}$. Отсюда, конечно, слѣдуетъ, что γ есть число несоизмѣримое, такъ какъ, по условію, не существуетъ никакого соизмѣрнаго числа, котораго m -ая степень равнялась бы числу A .

Замѣчаніе. Намъ остается еще развить и пополнить содержаніе § 284 „Элементарной алгебры“, въ которомъ давалось понятіе о несоизмѣримыхъ показателяхъ и ихъ свойствахъ. Это нами сдѣлано въ другой книгѣ, именно въ „Началахъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій“, изданія 3-е и слѣд.

Тогда $a^m > A$ и, слѣд., разность $A - a^m$ есть число положительное. Возьмемъ положительное число n , удовлетворяющее слѣдующему неравенству:

$$\frac{ma^{m-1}}{n} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} + \dots + \frac{1}{n^m} < A - a^m.$$

Для этого достаточно взять n настолько большимъ, чтобы каждое слагаемое суммы, стоящей въ лѣвой части этого неравенства, слѣдалось меньшимъ числа $\frac{A - a^m}{n}$; что, конечно, возможно. Тогда:

$$a^m + \frac{ma^{m-1}}{n} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} + \dots + \frac{1}{n^m} < A,$$

что, согласно биному Ньютона, даетъ: $\left(a + \frac{1}{n}\right)^m < A$. Такимъ образомъ, окказывается, что какое бы число a въ 1-мъ классѣ мы ни взяли, въ этомъ классѣ всегда найдется еще большее число. Значитъ, наибольшаго числа въ 1-мъ классѣ не можетъ быть. Такъ же можно доказать, что наименьшаго числа во 2-мъ классѣ не можетъ быть.

Чтобы избѣжать этого громоздкаго доказательства, мы въ текстѣ оставимъ вопросъ о характерѣ числа γ пока открытымъ.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Предѣлъ погрѣшности, пропеходящей отъ допущенія пропорціональности разностей между логарифмами разностямъ соответствующихъ чиселъ.

При нахожденіи $\text{Log}(n+h)$ (§ 310) мы писали пропорцію: $\Delta : d = h : 1$, въ которой:

$$\Delta = \text{Log}(n+h) - \text{Log } n \text{ и } d = \text{Log}(n+1) - \text{Log } n.$$

Изъ этой пропорціи мы опредѣляли $\Delta = dh$. Такъ какъ въ дѣйствительности разности между логарифмами не вполне пропорціональны разностямъ между соответствующими числами, то выведенное изъ пропорціи равенство есть только приложенное. Опредѣлимъ предѣлъ погрѣшности, заключающейся въ этомъ равенствѣ; другими словами, опредѣлимъ верхній предѣлъ разности между точными величинами Δ и произведения dh .

Средствами элементарной алгебры это выполнить очень затруднительно; но вопросъ рѣшается весьма просто при помощи выводимаго въ теоріи рядовъ равенства:

$$\text{Log}(1+x) = M \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right),$$

въ которомъ M есть модуль, служащій для перехода отъ натуральныхъ логарифмовъ къ десятичнымъ (онъ равенъ дроби 0,43429448...) и x — какое угодно число, абсолютная величина котораго не превосходитъ 1. Пользуясь этимъ равенствомъ, находимъ:

$$\begin{aligned} \Delta = \text{Log}(n+h) - \text{Log } n &= \text{Log} \frac{n+h}{n} = \text{Log} \left(1 + \frac{h}{n} \right) = \\ &= M \left(\frac{h}{n} - \frac{h^2}{2n^2} + \frac{h^3}{3n^3} - \frac{h^4}{4n^4} + \dots \right). \end{aligned}$$

Подобно этому получимъ:

$$\begin{aligned} d = \text{Log}(n+1) - \text{Log } n &= M \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots \right); \\ dh &= \left[\text{Log}(n+1) - \text{Log } n \right] h = M \left(\frac{h}{n} - \frac{h^2}{2n^2} + \frac{h^3}{3n^3} - \frac{h^4}{4n^4} + \dots \right). \end{aligned}$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ:

$$\Delta - dh = M \left[\frac{h(1-h)}{2n^2} - \frac{h(1-h^2)}{3n^3} + \dots \right].$$

Въ правой части этого равенства, внутри большихъ скобокъ, стоитъ знакопеременный рядъ, члены котораго по абсолютной величинѣ убываютъ; значитъ, рядъ этотъ представляетъ собою нѣкоторое положительное число, меньшее перваго члена ряда. Поэтому

$$\Delta - \bar{a}h < M \cdot \frac{h(1-h)}{2n^2}.$$

Такъ какъ сумма множителей h и $1-h$ постоянна, то наибольшая величина произведенія $h(1-h)$ равна $\frac{1}{4}$ при $h=1-h$, кромѣ того, если мы рассматриваемъ числа, большія 1000, то тогда $n^2 > 10^6$ и потому

$$\Delta - \bar{a}h < \frac{M}{4 \cdot 2 \cdot 10^6} = \frac{M}{8 \cdot 10^6}.$$

Подставивъ вмѣсто M указанное выше число, найдемъ:

$$\Delta - \bar{a}h < \frac{0,0542868 \dots}{10^6} = \frac{0,0054286 \dots}{10^6}.$$

Такъ какъ $\frac{1}{184} = 0,00543 \dots$, то, значитъ:

$$0 < \Delta - \bar{a}h < \frac{1}{184} \text{ стотысячной.}$$

Такимъ образомъ, принимая $\Delta = \bar{a}h$, мы дѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{184}$ стотысячной доли. Столь ничтожная ошибка вообще не оказываетъ вліянія на 5-й десятичный знакъ мантиссы и потому на нее можно не обращать вниманія.

